

*Dans cette fiche, chaque énoncé d'exercice est précédé de quelques rappels constituant des outils pour traiter l'exercice.*

### Exercice 1 – Un peu d'arithmétique

Définition 1 : on dit qu'un nombre entier  $m$  est un multiple d'un entier  $p$  s'il existe un entier  $k$  tel que  $m = kp$ .

On peut dire aussi que l'entier  $p$  divise  $m$ , mais attention à ne pas écrire de *quotient*, car on sortirait de l'arithmétique.

Définition 2 : on dit qu'un entier naturel est premier lorsqu'il possède exactement deux diviseurs distincts : 1 et lui-même.

Définition 3 : on dit que deux entiers naturels sont premiers entre eux lorsque qu'ils ne possèdent que 1 comme diviseur commun dans l'ensemble des entiers naturels.

1. Soit  $n$  un entier naturel.
  - a. Montrer que si  $n$  est un entier naturel alors, l'un des nombres  $n - 1, n, n + 1$  est un multiple de 3.
  - b. En déduire que si  $n$  est un nombre premier autre que 2 et 3 alors l'affirmation  $P(n)$  : «  $n^2 - 1$  est un multiple de 12 » est vraie.
  - c. Donner un exemple de nombre entier non premier  $n$  pour lequel  $P(n)$  est vraie et un exemple pour lequel  $P(n)$  est fausse.
2. Déterminer tous les entiers naturels  $n$  qui soient des carrés parfaits et tels qu'il existe un entier naturel  $p$  premier tel que  $n = 7p + 4$ .

1. a. Pour tout entier  $n$ , il existe deux entiers  $k$  et  $r$  tels que  $n = 3k + r$  et  $0 \leq r < 3$ . Il y a donc trois cas :  
 $r = 0$  alors  $n = 3k$  et c'est  $n$  qui est multiple de 3 ;  
 $r = 1$  alors  $n - 1 = 3k + 1 - 1 = 3k$  et c'est  $n - 1$  qui est multiple de 3 ;  
 $r = 2$  alors  $n + 1 = 3k + 3 = 3(k + 1)$  et c'est  $n + 1$  qui est multiple de 3.  
b. Pour tout entier  $n$ ,  $n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$ .  
Comme  $n$  est un nombre premier différent de 2 et de 3, il n'est multiple ni de 2 ni de 3.  
De plus, il est impair donc  $n - 1$  et  $n + 1$  sont pairs et leur produit  $n^2 - 1$  est multiple de 4.  
Enfin, comme  $n$  n'est pas multiple de 3, l'un des nombres  $n - 1$  et  $n + 1$  est nécessairement multiple de 3 et leur produit  $n^2 - 1$  est multiple de 3.  
Comme 4 et 3 sont premiers entre eux,  $n^2 - 1$  est multiple de 12 et l'affirmation  $P(n)$  est vraie.  
c.  $P(4)$  est fausse car  $4^2 - 1 = 15$  qui n'est pas multiple de 12 et  $P(25)$  est vraie car  $25^2 - 1 = 624 = 12 \times 52$ .
2. On veut pouvoir trouver un entier  $a$  positif et un entier premier  $p$  tels que  $n = 7p + 4$  et  $n = a^2$ .  
Ceci entraîne l'égalité  $7p = a^2 - 4 = (a + 2)(a - 2)$ .  
Comme 7 et  $p$  sont premiers, ils sont les seuls diviseurs premiers de  $7p$  et donc de  $(a + 2)(a - 2)$ .  
Les seuls cas possibles sont donc, puisque  $a - 2 < a + 2$  :  
 $a - 2 = 1$  et  $a + 2 = 7p$  soit  $a = 3$  mais alors  $p = \frac{5}{7}$  qui n'est pas un entier. Ce cas est impossible  
 $a - 2 = 7$  et  $a + 2 = p$  soit  $a = 9$  et  $p = 11$ , ce qui donne  $n = 81$   
 $a - 2 = p$  et  $a + 2 = 7$  soit  $a = 5$  et  $p = 3$ , ce qui donne  $n = 25$ .

### Exercice 2 – Polynômes et nombres premiers

Définition : on dit qu'un entier naturel est premier lorsqu'il possède exactement deux diviseurs distincts : 1 et lui-même.

1. Résoudre l'équation  $X^2 - 11X + 30 = 0$ .
2. Soit le polynôme  $P(x) = x^4 - 11x^2 + 30$ .
  - a. Montrer qu'il existe deux polynômes  $Q$  et  $R$  de degré 2 tels que pour tout nombre réel  $x$ ,  $P(x) = Q(x)R(x)$ .
  - b. Résoudre les équations  $Q(x) = 1, Q(x) = -1, R(x) = 1$  et  $R(x) = -1$ .
3. En déduire que, pour tout entier naturel  $n \geq 3$ , l'entier  $n^4 - 11n^2 + 30$  n'est pas un nombre premier.

1. L'équation  $X^2 - 11X + 30 = 0$  a pour discriminant  $\Delta = 121 - 120 = 1$  et pour solutions  $\frac{11-1}{2} = 5$  et  $\frac{11+1}{2} = 6$ .
2. a. En posant  $X = x^2$ , on peut écrire d'après la question 1.  $P(x) = (x^2 - 5)(x^2 - 6)$

et on peut poser  $Q(x) = x^2 - 5$  et  $R(x) = x^2 - 6$ .

b. L'équation  $Q(x) = 1$  équivaut à  $x^2 = 6$ . Ses solutions sont  $-\sqrt{6}$  et  $\sqrt{6}$  qui ne sont pas des nombres entiers. L'équation  $Q(x) = -1$  équivaut à  $x^2 = 4$ . Ses solutions sont 2 et -2.

L'équation  $R(x) = 1$  équivaut à  $x^2 = 7$ . Ses solutions sont  $-\sqrt{7}$  et  $\sqrt{7}$  qui ne sont pas des nombres entiers.

L'équation  $R(x) = -1$  équivaut à  $x^2 = 6$ . Ses solutions sont  $-\sqrt{6}$  et  $\sqrt{6}$  qui ne sont pas des nombres entiers.

3. Pour tout entier naturel  $n \geq 3$ ,  $n^4 - 11n^2 + 30 = (n^2 - 5)(n^2 - 6)$ . Les nombres  $n^2 - 5$  et  $n^2 - 6$  sont deux entiers naturels non nuls.

De plus, d'après la question précédente, si  $n \geq 3$  alors  $n^2 - 5 \neq \pm 1$  et  $n^2 - 6 \neq \pm 1$  donc l'entier  $n^4 - 11n^2 + 30$  est le produit de deux entiers différents de 1 et de -1. Il n'est donc pas un nombre premier.

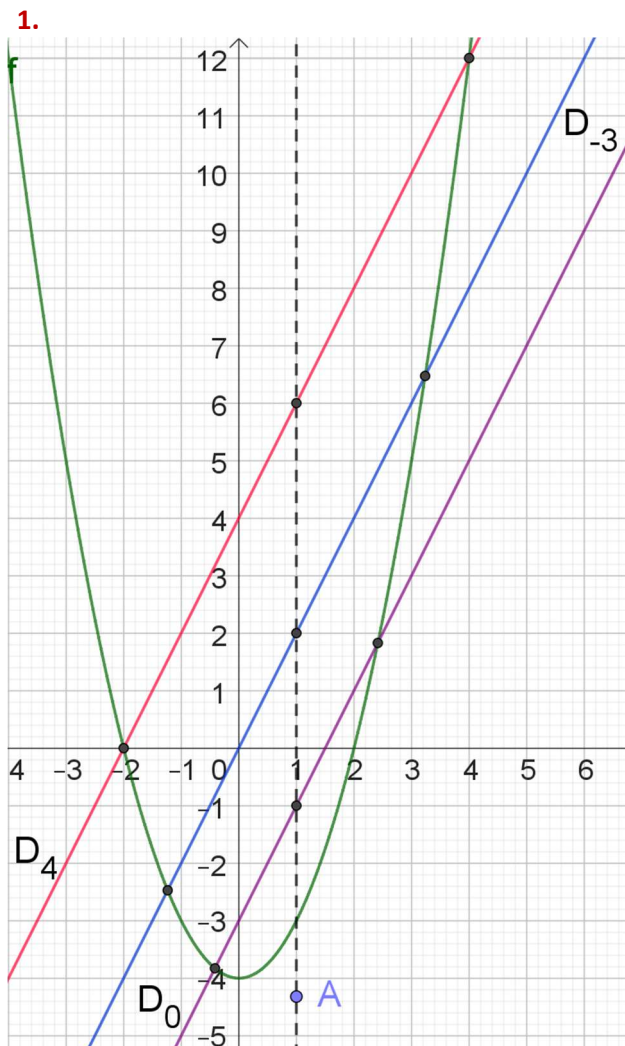
### Exercice 3 – Parabole et lieu géométrique

Propriété : les abscisses des points d'intersection des courbes représentatives, dans un repère du plan, de deux fonctions  $f$  et  $g$  sont les solutions de l'équation  $f(x) = g(x)$ .

Définition : on dit qu'un nombre décrit un ensemble lorsqu'il prend toutes les valeurs de cet ensemble et on dit qu'un point décrit un ensemble lorsque qu'il prend toutes les positions des points de cet ensemble.

Soit, dans le plan muni d'un repère, la parabole  $\mathcal{P}$  d'équation  $y = x^2 - 4$  et  $\mathcal{D}_m$  la droite d'équation  $y = 2x + m$ .

1. Tracer la parabole  $\mathcal{P}$  et les droites  $\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_{-3}, \mathcal{D}_4$ .
2. Pour quelles valeurs de  $m$  la droite  $\mathcal{D}_m$  et la parabole  $\mathcal{P}$  sont-elles sécantes ? On note  $\mathcal{E}$  l'ensemble de ces valeurs.
3. Dans ce cas, exprimer en fonction de  $m$  l'abscisse du milieu  $I_m$  du segment joignant les points d'intersection de la parabole et de la droite.
4. Que peut-on dire des points  $I_m$  lorsque  $m$  décrit l'ensemble  $\mathcal{E}$  ?



2. La parabole  $\mathcal{P}$  et la droite  $\mathcal{D}_m$  sont sécantes si et seulement si l'équation  $x^2 - 4 = 2x + m$  admet au moins une solution.

Le discriminant de cette équation, qui s'écrit aussi

$$x^2 - 2x - (4 + m) = 0 \text{ est } \Delta = 4 + 4(4 + m)$$

$$\text{soit } \Delta = 4(5 + m).$$

La parabole  $\mathcal{P}$  et la droite  $\mathcal{D}_m$  sont donc sécantes si et seulement si  $m \geq -5$ .

3. Plus précisément si  $m = -5$ , alors la parabole et la droite ont un unique point commun d'abscisse  $\frac{2}{2} = 1$  et

si  $m > -5$  alors la parabole et la droite ont deux points d'intersection d'abscisses

$$\frac{2-2\sqrt{5+m}}{2} = 1 - \sqrt{5+m} \text{ et } \frac{2+2\sqrt{5+m}}{2} = 1 + \sqrt{5+m}.$$

L'abscisse du point  $I_m$  est donc égale à

$$\frac{1-\sqrt{5+m}+1+\sqrt{5+m}}{2} = 1.$$

4. On constate que tous les points  $I_m$  sont situés sur la droite  $d$  d'équation  $x = 1$ .

Le problème est de savoir si, lorsque  $m$  décrit l'ensemble  $\mathcal{E}$ , le point  $I_m$  décrit toute la droite  $d$ , c'est-à-dire prend toutes les positions sur cette droite.

La réponse est non car si  $A$  est un point de  $d$  d'ordonnée  $y_A < -3$ , alors le réel  $m$  tel que la droite  $\mathcal{D}_m$  passe par le point  $A$  vérifie  $2x_A + m < -3$  soit  $2 + m < -3$  (car  $x_A = 1$ ) soit  $m < -5$  et, dans ce cas, la parabole et la droite  $\mathcal{D}_m$  n'ont pas de point d'intersection. Le point  $A$  ne peut donc être défini comme le milieu d'un segment joignant les points d'intersection de la parabole et de la droite.

En fait, on montre que le point  $I_m$  décrit une demi-droite incluse dans la droite  $d$  et d'extrémité le point  $I_{-5}$ .

## Exercice 4 – Calculs sur les racines d'un polynôme

**Définition :** Soit  $n$  un entier naturel, on appelle fonction polynôme (ou polynôme) de degré  $n$ , une fonction  $P$  pour laquelle il existe des réels  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  tels que  $a_n \neq 0$  et pour tout réel  $x$ ,  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ .

Les réels  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  sont appelés les coefficients de  $P$ .

**Propriété :** soit  $P$  et  $Q$  deux fonctions polynômes.  $P$  et  $Q$  sont égales (c'est-à-dire pour tout réel  $x$ ,  $P(x) = Q(x)$ ) si et seulement si  $P$  et  $Q$  ont même degré et les mêmes coefficients.

Soit  $P$  le polynôme défini sur  $\mathbf{R}$  par  $P(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 1$ . On suppose que  $P$  admet trois racines  $a, b, c$ .

1. Montrer que pour tous réels  $x, y$  et  $z$ ,  $x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz$ .

2. Que vaut  $a^3 + b^3 + c^3$  ?

1. Pour tous réels  $x, y$  et  $z$ , si  $A = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz$  alors

$$A = x^3 + xy^2 + xz^2 - x^2y - xyz - x^2z + yx^2 + y^3 + yz^2 - xy^2 - y^2z - yzx + zx^2 + zy^2 + z^3 - zxy - z^2y - z^2x + 3xyz$$

$$\text{soit } A = x^3 + y^3 + z^3 + xy^2 - xy^2 + xz^2 - z^2x - x^2y + yx^2 - x^2z + zx^2 + yz^2 - z^2y - y^2z + zy^2 - 3xyz + 3xyz$$

$$\text{soit } A = x^3 + y^3 + z^3.$$

**Remarque :** dans ce type de raisonnement (montrer que deux expressions sont égales), on part généralement de l'expression la plus longue pour la réduire et aboutir à l'expression la plus courte

2. Les nombres  $a, b, c$  désignant les trois racines du polynôme  $P$  et le coefficient de  $x^3$  dans ce polynôme étant 1, on peut factoriser  $P$  ainsi :  $P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ .

En développant, on obtient  $P(x) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc$  et, comme on doit avoir l'égalité  $x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = (x - a)(x - b)(x - c)$  pour tout réel  $x$ , on en déduit le système d'égalités suivant :

$$\begin{cases} a + b + c = 2 \\ ab + bc + ca = -3 \\ -abc = 1 \end{cases}$$

En insérant ces égalités dans celle démontrée au 1. et appliquée aux valeurs  $a, b, c$ , on obtient :

$$a^3 + b^3 + c^3 = 2(a^2 + b^2 + c^2 - (-3)) + 3(-1)$$

$$\text{Soit } a^3 + b^3 + c^3 = 2(a^2 + b^2 + c^2) + 3.$$

$$\text{Or, on montre facilement que } a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$$

$$\text{D'où } a^3 + b^3 + c^3 = 2(4 - 2(-3)) + 3 = 23.$$

## Exercice 5 – Algorithme de Babylone

On rappelle (vu dans la fiche 1) que pour comparer deux nombres, on peut étudier le signe de la différence et que pour tous nombres positifs  $a$  et  $b$ ,  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ .

Le nombre  $\sqrt{2}$  est un irrationnel mais des Babyloniens (vers 1800-1500 avant J.C.) connaissaient un procédé d'approximation de ce nombre par des rationnels.

1. Montrer que, pour tout réel  $a$  strictement positif, le nombre  $\sqrt{2}$  est compris entre  $a$  et  $\frac{2}{a}$  et que la moyenne arithmétique  $\frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$  de ces nombres est supérieure à  $\sqrt{2}$ .
2. En déduire un procédé d'approximation de  $\sqrt{2}$ .
3. En partant de  $a = 2$ , déterminer les cinq premiers encadrements de  $\sqrt{2}$  par des rationnels et l'amplitude du dernier encadrement.



La tablette Ybc 7289 qui donne les premières décimales de  $\sqrt{2}$

1. Pour l'encadrement de  $\sqrt{2}$ , on distingue deux cas.

Si  $0 < a < \sqrt{2}$ , alors  $\frac{1}{a} > \frac{1}{\sqrt{2}}$  (puisque les nombres considérés sont strictement positifs) et  $\frac{2}{a} > \frac{2}{\sqrt{2}}$  (puisque 2 est positif). Ceci s'écrit  $\frac{2}{a} > \sqrt{2}$ . On a donc  $a < \sqrt{2} < \frac{2}{a}$ .

Si  $a > \sqrt{2}$ , alors  $\frac{1}{a} < \frac{1}{\sqrt{2}}$  (puisque les nombres considérés sont strictement positifs) et  $\frac{2}{a} < \frac{2}{\sqrt{2}}$  (puisque 2 est positif). Ceci s'écrit  $\frac{2}{a} < \sqrt{2}$ . On a donc  $\frac{2}{a} < \sqrt{2} < a$ .

Dans les deux cas  $\sqrt{2}$  est compris entre  $a$  et  $\frac{2}{a}$ .

Comme on a vu que pour tous nombres positifs  $a$  et  $b$ ,  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ , on obtient si  $b = \frac{2}{a}$ ,  $\sqrt{2} \leq \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$ .

2. La moyenne arithmétique de  $a$  et  $\frac{2}{a}$  est comprise entre ces deux nombres et, d'après la question précédente supérieure à  $\sqrt{2}$ .

Donc si  $0 < a < \sqrt{2}$ , alors  $a < \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) < \frac{2}{a}$  et si  $a > \sqrt{2}$ , alors  $\frac{2}{a} < \sqrt{2} < \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) \leq a$ .

Cela permet d'obtenir un procédé d'approximation de  $\sqrt{2}$  en prenant à chaque nouvelle étape du procédé :

- L'encadrement  $a < \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$  si  $0 < a < \sqrt{2}$  ;

- L'encadrement  $\frac{2}{a} < \sqrt{2} < \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$  si  $a > \sqrt{2}$ .

3. Si on prend au départ  $a = 2$ , on est dans le cas où  $1 < \sqrt{2} < a$ .

Le deuxième encadrement obtenu est alors  $\frac{2}{a} < \sqrt{2} < \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$  soit  $1 < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$ .

Comme  $\frac{3}{2} > \sqrt{2}$ , on reprend l'encadrement  $\frac{2}{a} < \sqrt{2} < \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$  avec  $a = \frac{3}{2}$ .

Alors  $\frac{2}{a} = \frac{4}{3}$  et  $\frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{9+8}{6}\right) = \frac{17}{12}$  et le troisième encadrement obtenu est  $\frac{4}{3} < \sqrt{2} < \frac{17}{12}$ .

On recommence avec  $a = \frac{17}{12}$ . Alors  $\frac{2}{a} = \frac{24}{17}$  et  $\frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{24}{17}\right) = \frac{577}{408}$

d'où un quatrième encadrement  $\frac{24}{17} < \sqrt{2} < \frac{577}{408}$ .

On recommence avec  $a = \frac{577}{408}$ .

### Exercice 6 – Quadrilatère complet

Le calcul vectoriel est un outil fort utile pour les démonstrations en géométrie :

- caractérisation du milieu I d'un segment [AB] par l'une des égalités vectorielles suivantes :

$$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI} \text{ ou } \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$$

- si I est le milieu du segment [AB] alors pour tout point M du plan,  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ .

- parallélisme de droites ou alignement de points par la colinéarité de deux vecteurs

- parallélogramme par l'égalité de deux vecteurs

- relation de Chasles...

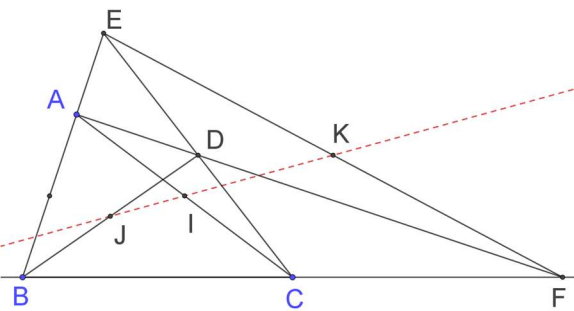
Dans tout exercice de géométrie, on fait une figure.

Soit ABC un triangle. On considère les points D, E, F définis par :

$$\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \text{ D est le milieu du segment [EC] et } \overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BC}.$$

1. Exprimer les vecteurs  $\overrightarrow{AD}$  et  $\overrightarrow{AF}$  en fonction des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ . En déduire que les points A, D et F sont alignés.

2. Soit I, J, K les milieux respectifs des segments [AC], [BD], [EF]. Montrer que les points I, J, K sont alignés.



1. D est le milieu du segment [EC] donc  $\overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EC}$ .

On en déduit que :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC})$$

$$\text{Soit } \overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{Soit } \overrightarrow{AD} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

$$\text{D'autre part, } \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$$

$$\text{Soit } \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$$

On constate que  $4\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AF}$  et on en déduit que les points A, D et F sont alignés.

2. On raisonne de la même façon en commençant par exprimer les vecteurs  $\overrightarrow{IJ}$  et  $\overrightarrow{IK}$  en fonction des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sachant que par définition des points I, J, K on sait que  $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$ ,  $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF})$

On en déduit :

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$$

$$\text{soit } \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{8}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{et } \overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right)$$

$$\text{soit } \overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}\right) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

et on constate que  $-2\vec{IJ} = \vec{IK}$  ce qui permet d'affirmer que les points I, J, K sont alignés.

### Exercice 7 – Alignement, parallélisme en géométrie analytique

Se placer dans un repère permet de résoudre certains exercices de géométrie en :

- traduisant un alignement ou un parallélisme en termes de colinéarité de vecteurs ;
- utilisant le déterminant de deux vecteurs ;
- traduisant sur ses coordonnées l'appartenance d'un point à une droite.

Le repère peut alors être donné dès le départ ou introduit « judicieusement » pour travailler avec des coordonnées simples à déterminer.

Soit ABC un triangle non aplati. Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments [AB], [BC] et [CA].

On considère un point D et on note E et F les images respectives du point D par les translations de vecteurs  $\vec{CI}$  et  $\vec{KB}$ .

On se place dans le repère  $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$ .

1. Déterminer la nature du quadrilatère EAJF.
2. Montrer que si G est le milieu du segment [EF] alors les droites (DG) et (BC) sont parallèles.

1. Dans le repère  $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$ , on a :  $A(0,0), B(1,0), C(0,1)$ .

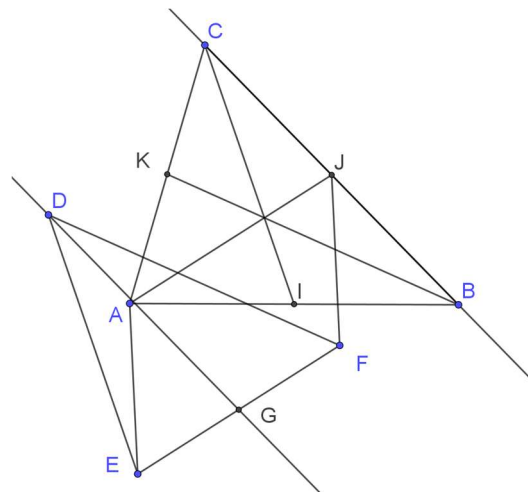
Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments [AB], [BC] et

[CA], ce qui donne  $I\left(\frac{1}{2}, 0\right), J\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  et  $K\left(0, \frac{1}{2}\right)$  et le vecteur  $\vec{AJ}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ .

On en déduit les vecteurs  $\vec{CI}\left(\frac{1}{2}, -1\right)$  et  $\vec{KB}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ .

Comme E et F sont images respectives du point D par les translations de vecteurs  $\vec{CI}$  et  $\vec{KB}$ , si on note  $(x, y)$  les coordonnées du point D, alors on a :

$E\left(x + \frac{1}{2}, y - 1\right)$  et  $F\left(x + \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2}\right)$ . On en déduit le vecteur  $\vec{EF}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ .



On constate alors que  $\vec{EF} = \vec{AJ}$ , ce qui signifie que le quadrilatère EAJF est un parallélogramme.

2. G est le milieu de [EF]. Ses coordonnées sont donc  $\left(x + \frac{3}{4}, y - \frac{3}{4}\right)$ . On obtient ainsi les vecteurs  $\vec{DG}\left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right)$  et

$\vec{BC}\left(-1, 1\right)$ . En calculant  $\det(\vec{DG}, \vec{BC})$  ou en remarquant que  $\vec{DG} = -\frac{3}{4}\vec{BC}$ , on constate que les vecteurs  $\vec{DG}$  et  $\vec{BC}$  sont colinéaires. Les droites (DG) et (BC) sont donc bien parallèles.