



Exercice 1 Inégalités et calcul littéral

Définition : on dit qu'un nombre a est inférieur ou égal à un nombre b lorsque $b - a \geq 0$.

Cette définition conduit à une méthode pratique pour comparer deux nombres.

Propriétés :

(1) Pour tous réels a et b strictement positifs, si $a \leq b$, alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

(2) Pour tout réels a, b, c et d positifs, si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $ac \leq bd$.

1. a. Démontrer que, pour tous réels x, y strictement positifs, $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.

a. Soit x, y, z des réels strictement positifs, développer et réduire le produit $(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$.

b. En déduire que si x, y, z des réels strictement positifs tels que $x + y + z \leq 3$, alors $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3$.

2. Soit a, b, c trois nombres réels de l'intervalle $]0, 1]$.

a. Montrer que $(ab - 1)(bc - 1)(ca - 1) \leq 0$.

b. En déduire que $a + b + c + \frac{1}{abc} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + abc$.

1. a. $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 = \frac{x^2 + y^2 - 2xy}{xy} = \frac{(x-y)^2}{xy}$. Comme x et y sont strictement positifs, $xy > 0$. De plus $(x - y)^2 \geq 0$.

On a donc bien $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.

b. $(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 1 + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + 1 + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} + 1 = 3 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right)$.

c. Le résultat du a. permet d'écrire $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$, $\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 2$ et $\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geq 2$ d'où $(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9$.

On en déduit que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 9 \times \frac{1}{x+y+z}$ (puisque $x + y + z > 0$).

Or, d'après la propriété (1), comme $0 < x + y + z \leq 3$, $\frac{1}{x+y+z} \geq \frac{1}{3}$ d'où $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3$.

2. a. Comme $0 < a \leq 1$ et $0 < b \leq 1$, d'après la propriété (2), $0 < ab \leq 1 \times 1$ soit $ab - 1 \leq 0$. On montre de même que $bc - 1 \leq 0$ et $ca - 1 \leq 0$. Comme le produit d'un nombre impair de nombres négatifs est négatif, on a bien $(ab - 1)(bc - 1)(ca - 1) \leq 0$.

b. $a + b + c + \frac{1}{abc} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} - abc = -\frac{1}{abc} (bc + ca + ab + 1 - a^2bc - ab^2c - abc^2 - a^2b^2c^2)$

D'autre part, $(ab - 1)(bc - 1)(ca - 1) = (ab^2c - ab - bc + 1)(ca - 1)$

Soit $(ab - 1)(bc - 1)(ca - 1) = a^2b^2c^2 - ab^2c - a^2bc + ab - abc^2 + bc + ca - 1$.

Donc $a + b + c + \frac{1}{abc} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} - abc = -\frac{1}{abc} (ab - 1)(bc - 1)(ca - 1)$.

D'après le a. on peut donc en déduire que $a + b + c + \frac{1}{abc} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} - abc \geq 0$

c'est-à-dire $a + b + c + \frac{1}{abc} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + abc$.

Exercice 2 – Racines et coefficients d'un trinôme

Propriété : Soit a et b deux nombres réels tels que $a + b = s$ et $ab = p$. Alors a et b sont les solutions de l'équation $x^2 - sx + p = 0$.

Deux amis discutent sur les travaux entrepris dans le séjour rectangulaire de l'appartement de 60 m² de l'un d'entre eux :

- Tiens, tu as posé du papier peint au plafond et une corniche tout autour de ce plafond. Cela t'a-t-il coûté cher ?
- Ah, secret ! Je te dirai seulement que le prix au mètre de la corniche était deux fois plus élevé que le prix au mètre carré du papier peint mais que j'ai payé exactement la même somme pour les deux matériaux.

Après un instant de réflexion, l'ami remarque :

- Tu ferais mieux d'examiner de près ta facture.

Expliquer pourquoi.

Soit x et y les dimensions au sol du séjour. L'aire de la pièce est donc $\mathcal{A} = xy$ et son périmètre est $\mathcal{P} = 2(x + y)$. Comme le prix au mètre de la corniche est deux fois plus élevé que le prix au mètre carré du papier peint, $2 \times 2(x + y) = xy$. Les nombres x et y sont donc les solutions du système $\begin{cases} x + y = \frac{\mathcal{A}}{4} \\ xy = \mathcal{A} \end{cases}$ c'est-à-dire les solutions de l'équation du second degré $x^2 - \frac{\mathcal{A}}{4}x + \mathcal{A} = 0$. Or le discriminant de cette équation est $\Delta = \left(\frac{\mathcal{A}}{4}\right)^2 - 4\mathcal{A}$. On sait que l'équation a des solutions donc $\left(\frac{\mathcal{A}}{4}\right)^2 - 4\mathcal{A} \geq 0$ soit $\frac{\mathcal{A}}{16}(\mathcal{A} - 64) \geq 0$ c'est-à-dire $\mathcal{A} \geq 64$. Or une superficie de séjour de plus de 64 m^2 est assez rare dans un appartement.

Exercice 3 – Recherche de nombres premiers dans certaines suites

Définition : un entier naturel est un nombre premier lorsqu'il admet exactement deux diviseurs positifs, 1 et lui-même.

Pour factoriser un polynôme du second degré $P(x) = ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0$, on peut :

- chercher ses racines et, si elles existent, écrire $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ dans le cas de deux racines distinctes x_1 et x_2 ou $P(x) = a(x - x_0)^2$ dans le cas d'une racine double x_0 ;
- faire apparaître une identité remarquable comme $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$ ou $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$.

a. En 1772, Leonhard Euler annonce que le polynôme $P(n) = n^2 + n + 41$ prend pour valeur un nombre premier pour tout nombre entier n inférieur 40. Le vérifier.

b. Pour quels nombres entiers naturels n le nombre $N_1 = n^4 - 20n^2 + 75$ est-il un nombre premier ?

c. Pour quels nombres entiers naturels n le nombre $N_2 = n^4 - 3n^2 + 9$ est-il un nombre premier ?

a. On calcule $P(n)$ pour tout entier n à 40, ce qui donne le tableau :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$P(n)$	41	43	47	53	61	71	83	97	113	131	151	173
n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
$P(n)$	197	223	251	281	313	347	383	421	461	503	547	593
n	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
$P(n)$	641	691	743	791	853	911	971	1 033	1 097	1 163	1 231	1 301
n	36	37	38	39								
$P(n)$	1 373	1 447	1 523	1 601								

En cherchant, pour chaque valeur de n , les diviseurs premiers successifs éventuels de $P(n)$ jusqu'à $\sqrt{P(n)}$, on constate que tous les nombres $P(n)$ sont bien des nombres premiers.

b. Le discriminant de l'équation $x^2 - 20x + 75 = 0$ vaut $\Delta = 400 - 4 \times 75 = 100$ et les solutions de cette équation sont $x_1 = \frac{20-10}{2} = 5$ et $x_2 = \frac{20+10}{2} = 15$.

On peut donc écrire que pour tout entier naturel n , $N_1 = (n^2 - 5)(n^2 - 15)$

$(n^2 - 5)$ et $(n^2 - 15)$ sont distincts donc :

Pour que N_1 soit donc un nombre premier il faut que $n^2 - 5 = \pm 1$ ou $n^2 - 15 = \pm 1$. Les seules valeurs possibles puisque n est un entier naturel sont $n = 2$ et $n = 4$ et ces valeurs sont bien solutions.

c. Pour tout entier naturel n , $N_2 = n^4 - 3n^2 + 9 = n^4 + 6n^2 + 9 - 9n^2 = (n^2 + 3)^2 - (3n)^2$

Soit $N_2 = (n^2 + 3 - 3n)(n^2 + 3 + 3n)$

Pour $n = 0$, $N_2 = 9$ n'est pas premier

Pour n strictement positif, $(n^2 + 3 - 3n)$ et $(n^2 + 3 + 3n)$ sont distincts donc

Pour que N_1 soit N_2 est donc un nombre premier il faut que $n^2 + 3 - 3n = \pm 1$ ou $n^2 + 3 + 3n = \pm 1$.

Il n'y a plus qu'à résoudre les 4 équations du second degré et constater que les seules solutions entières positives sont $n = 1$ et $n = 2$.

Exercice 4 – Tangentes et paraboles

Propriété 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère. Soit a un réel de l'intervalle I et A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a . Si f est dérivable en a , alors $\mathcal{C}_f$ admet au point A une tangente d'équation $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

Propriété 2 : Les points d'intersections des courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de deux fonctions f et g sont les points de ces courbes dont les abscisses sont solutions de $f(x) = g(x)$.

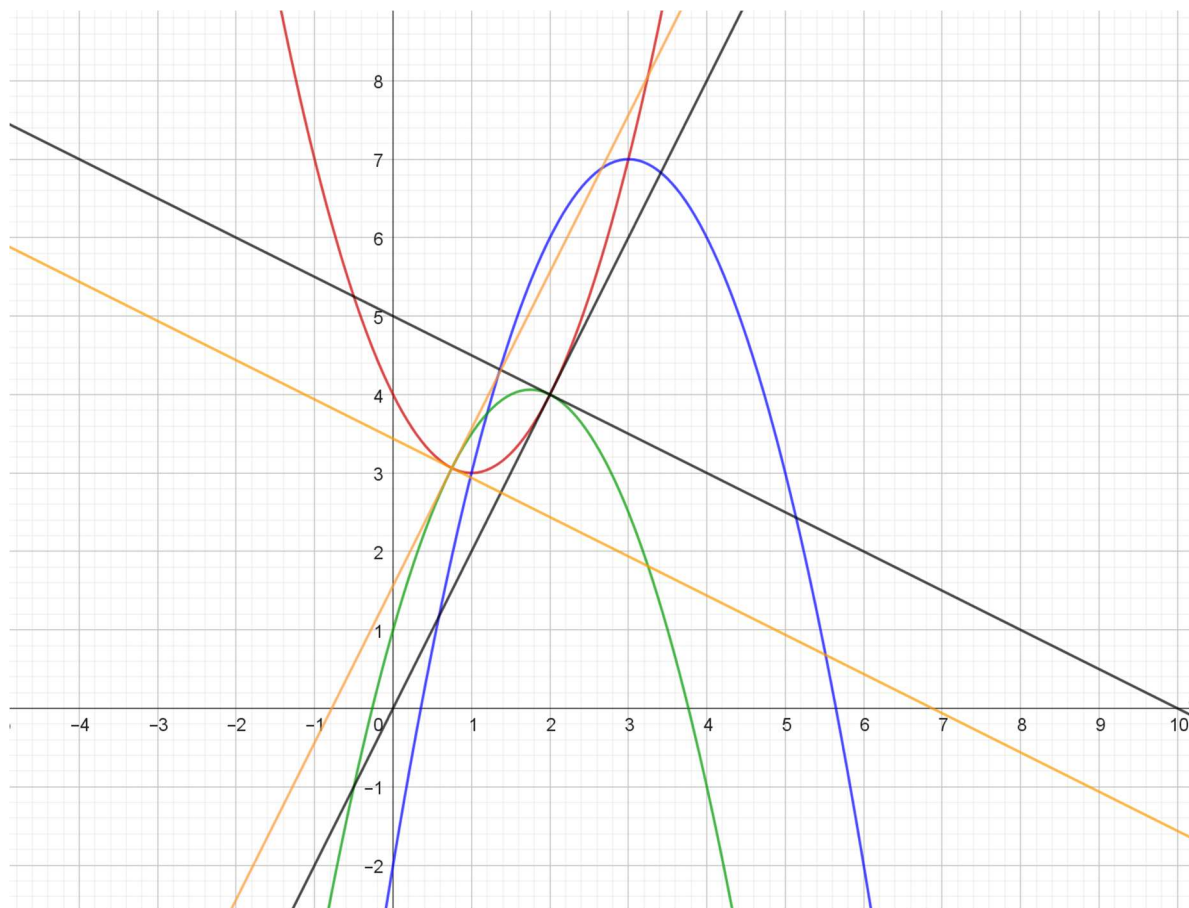
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 4$ et $\mathcal{P}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Soit a un nombre réel. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{P}$ au point d'abscisse a .
b. Déterminer, si elles existent, les tangentes à $\mathcal{P}$ passant par l'origine du repère.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = -x^2 + 6x - 2$ et $\mathcal{P}'$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
a. Déterminer les points d'intersections éventuels des deux paraboles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.
b. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{P}'$ au point $B(b, g(b))$.
c. En déduire s'il existe une tangente commune à ces deux paraboles.
3. On dit que deux courbes sont orthogonales lorsqu'elles admettent au moins un point commun et, qu'en ce(s) point(s), elles ont des tangentes perpendiculaires.

Soit h la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $h(x) = -x^2 + \frac{7}{2}x + 1$ et $\mathcal{P}''$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Montrer que les courbes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}''$ sont orthogonales.

1. a. La fonction trinôme f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et, pour tout réel x , $f'(x) = 2x - 2$.
Une équation de la tangente $\mathcal{T}_a$ à $\mathcal{P}$ au point d'abscisse a est donc $y = f'(a)(x - a) + f(a)$
Soit $y = (2a - 2)(x - a) + (a^2 - 2a + 4)$ soit $y = (2a - 2)x + (2a - 2)(-a) + (a^2 - 2a + 4)$
C'est-à-dire $y = (2a - 2)x - a^2 + 4$.
b. La tangente $\mathcal{T}_a$ passe par l'origine si et seulement si le couple $(0,0)$ est solution de l'équation
 $y = (2a - 2)x - a^2 + 4$ soit $-a^2 + 4 = 0$ c'est-à-dire $a = -2$ ou $a = 2$.
Il existe donc deux tangentes à la parabole $\mathcal{P}$ passant par l'origine : la tangente $\mathcal{T}_{-2}$ d'équation $y = -6x$ et la tangente $\mathcal{T}_2$ d'équation $y = 2x$.
2. a. Les points communs, s'ils existent, aux deux paraboles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont les points de ces courbes dont les abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ soit $x^2 - 2x + 4 = -x^2 + 6x - 2$ c'est-à-dire $2x^2 - 8x + 6 = 0$ soit $x^2 - 4x + 3 = 0$. Les solutions de cette équation sont 1 et 3.
Les deux paraboles ont donc deux points communs : les points de coordonnées $(1,3)$ et $(3,7)$.
b. La fonction g est dérivable sur $\mathbf{R}$ et, pour tout réel x , $g'(x) = -2x + 6$.
Une équation de la tangente à $\mathcal{P}'$ au point d'abscisse b est donc $y = f'(b)(x - b) + f(b)$
Soit $y = (-2b + 6)(x - b) + (-b^2 + 6b - 2)$ soit, après simplification, $y = (-2b + 6)x + b^2 - 2$.
c. Soit m et p deux nombres réels et soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = mx + p$. Les deux paraboles ont la droite $\mathcal{D}$ comme tangente commune si et seulement s'il existe deux réels a et b tels que :
$$\begin{cases} m = 2a - 2 = -2b + 6 \\ p = -a^2 + 4 = b^2 - 2 \end{cases} \text{ Le système } \begin{cases} 2a - 2 = -2b + 6 \\ -a^2 + 4 = b^2 - 2 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} a + b = 4 \\ a^2 + b^2 = 6 \end{cases}$$

Il implique donc l'équation $a^2 + (4 - a)^2 = 6$ soit $2a^2 - 8a + 10 = 0$ soit $a^2 - 4a + 5 = 0$.
Le discriminant de cette équation est strictement négatif. Il n'existe donc pas de tangente commune aux deux courbes.
3. Les points communs, s'ils existent, aux deux paraboles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}''$ sont les points de ces courbes dont les abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = h(x)$ soit $x^2 - 2x + 4 = -x^2 + \frac{7}{2}x + 1$
c'est-à-dire $2x^2 - \frac{11}{2}x + 3 = 0$ soit $4x^2 - 11x + 6 = 0$. Les solutions de cette équation sont $\frac{3}{4}$ et 2. Les paraboles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}''$ ont donc deux points communs, les points de coordonnées $(\frac{3}{4}, \frac{49}{16})$ et $(2,4)$.
La fonction h est dérivable sur $\mathbf{R}$ et, pour tout réel x , $h'(x) = -2x + \frac{7}{2}$.
 $h'(\frac{3}{4}) = 2$ et $f'(\frac{3}{4}) = -\frac{1}{2}$ sont les coefficients directeurs des tangentes à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}''$ au point d'abscisse $\frac{3}{4}$ et $2 \times (-\frac{1}{2}) = -1$ donc les deux tangentes sont perpendiculaires.
 $h'(2) = -\frac{1}{2}$ et $f'(2) = 2$ sont les coefficients directeurs des tangentes à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}''$ au point d'abscisse 2 et $(-\frac{1}{2}) \times 2 = -1$ donc les deux tangentes sont perpendiculaires.
On en conclut que les paraboles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}''$ sont orthogonales.



Exercice 5 – Nombres pentagonaux

Définition : on dit qu'une suite (u_n) est arithmétique lorsqu'il existe un nombre réel r tel que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = r$.

Méthode : démontrer qu'une suite est arithmétique revient donc à démontrer que la différence $u_{n+1} - u_n$ entre deux termes consécutifs de la suite ne dépend pas de n .

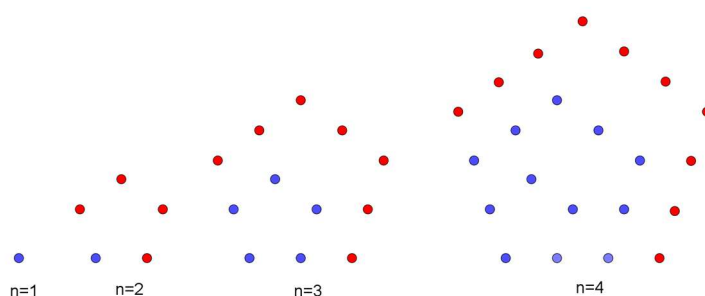
Propriétés :

(1) Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r . Alors $u_n = u_1 + (n - 1)r$.

(2) Soit (u_n) une suite arithmétique. Alors $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$.

Partant d'un point (étape 1), on construit successivement des pentagones réguliers en ajoutant un point sur la ligne du bas comme sur la figure ci-contre.

On note u_n le nombre de points (rouges ou bleus) obtenus à l'étape n .



1. Donner les valeurs de u_1, u_2, u_3, u_4 .
2. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , $u_{n+1} = u_n + 3n + 1$.
3. Déterminer la nature de la suite de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$.
4. En exprimant, pour $n < 1$ la somme $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}$ de deux manières différentes, en déduire une expression explicite de u_n en fonction de n .
5. Quel le nombre pentagonal u_{2025} ?

1. On vérifie sur les schémas que $u_1 = 1, u_2 = 1 + 4 = 5, u_3 = 5 + 7 = 12, u_4 = 12 + 10 = 22$.
2. Pour tout entier naturel non nul n , pour passer de l'étape n à l'étape $n + 1$, on ajoute trois côtés de pentagone contenant chacun $n + 1$ points mais avec deux points sommets communs.
Donc $u_{n+1} = u_n + 3(n + 1) - 2 = u_n + 3n + 1$
3. Pour tout entier naturel non nul n , $v_{n+1} - v_n = (u_{n+2} - u_{n+1}) - (u_{n+1} - u_n) = 3(n + 1) + 1 - (3n + 1)$

Soit $v_{n+1} - v_n = 3$. La suite (v_n) est donc une suite arithmétique de raison 3.

On sait d'ailleurs que, pour tout entier naturel non nul n , $v_n = 3n + 1$.

4. On peut écrire

$$S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_{n-2} + v_{n-1} = (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + (u_4 - u_3) + \dots + (u_{n-1} - u_{n-2}) + (u_n - u_{n-1})$$

Les termes de cette somme dite télescopique s'annulent deux à deux sauf deux termes et $S_n = u_n - u_1$.

D'autre part, S_n est la somme des $n-1$ premiers termes consécutifs de la suite arithmétique (v_n) donc

$$S_n = (n-1) \times \frac{v_1 + v_{n-1}}{2} = (n-1) \times \frac{4 + 3(n-1) + 1}{2} = \frac{(n-1)(3n+2)}{2}.$$

Remarque : attention, ici la somme comprend $n - 1$ termes et non n .

$$\text{Des deux expressions de } S_n, \text{ on déduit que } u_n = u_1 + \frac{(n-1)(3n+2)}{2} = 1 + \frac{(n-1)(3n+2)}{2}.$$

Remarque : on peut alors vérifier le résultat obtenu sur les valeurs 1, 2, 3 et 4 calculées à la question 1.

$$5. u_{2\,025} = 1 + \frac{2\,024 \times (3 \times 2\,025 + 2)}{2} = 1 + 1\,012 \times 6\,077 = 6\,149\,925.$$

Exercice 6 – Produit scalaire et orthogonalité

Définition 1 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de représentants respectifs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ($\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$).

On note p le réel $p = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$ si les points B et C sont distincts du point A et $p = 0$ sinon.

(On admet que p ne dépend pas des représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ choisis pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$).

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre p .

Définition 2 : On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de représentants respectifs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux lorsque soit l'un des vecteurs est le vecteur nul soit les droites (AB) et (AC) sont orthogonales.

(On admet que l'orthogonalité ne dépend pas des représentants choisis pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$).

Pour calculer un produit scalaire dans un problème de géométrie plane, il faut principalement avoir en tête les deux expressions :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} \text{ si les points } B \text{ et } C \text{ sont distincts du point } A ;$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} \text{ où } H \text{ est le projeté orthogonal de } C \text{ sur } (AB).$$

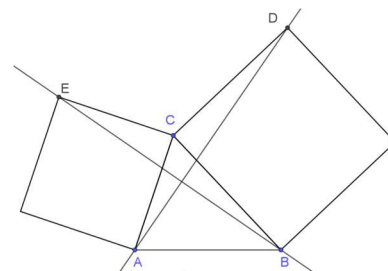
Pour démontrer des orthogonalités, il est souvent utile de se référer :

- au théorème 1 : « $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ » ;
- à des décompositions de vecteurs grâce à la relation de Chasles ;
- aux propriétés opératoires du produit scalaire.

1. Soit ABC un triangle.

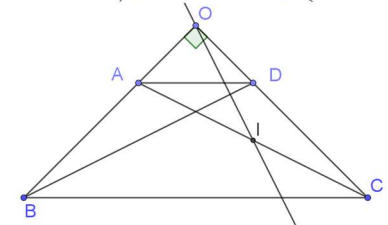
A l'extérieur de ce triangle on construit deux carrés comme sur la figure ci-contre.

- Montrer que $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CE}$.
- En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{EB}$ sont orthogonaux.
- Que peut-on en déduire pour les droites (AD) et (EB) ?



2. Soit ABCD un trapèze isocèle dont les côtés non parallèles sont perpendiculaires en un point O, comme sur la figure ci-contre et soit I le milieu de [AC].

- Exprimer $\overrightarrow{OI}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OC}$.
- En déduire que $2\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}$.
- Démontrer que les droites (OI) et (BD) sont perpendiculaires.



- $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CA \times CB \times \cos \widehat{ACB}$ et $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CE} = CE \times CD \times \cos \widehat{ECD}$.
Or $CA = CE$ et $CB = CD$ puisqu'on a des carrés et $\widehat{ECD} = 360^\circ - (90^\circ + \widehat{ACB} + 90^\circ) = 180^\circ - \widehat{ACB}$
donc $\cos \widehat{ECD} = -\cos \widehat{ACB}$. On en déduit que $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CE}$.
 - $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{EB} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) \cdot (\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB}$
Soit $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{EB} = 0 - \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CE} + 0$ (puisque on a des carrés donc des angles droits).
D'après le a., on en déduit que $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{EB} = -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$.

- c. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{EB} = 0$. Les droites (AD) et (EB) sont donc perpendiculaires.
2. a. I étant le milieu de [AC], on a $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$.
- b. $2\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}$
 Or (OA) et (OD) sont perpendiculaires donc $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = 0$ et $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{BO} = 0$.
 On a donc $2\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = -OA \times OB \times \cos \widehat{AOB} + OC \times OD \times \cos \widehat{COD}$
- c. Soit $2\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BD} = -OA \times OB + OC \times OD = 0$ car le trapèze étant isocèle, la médiatrice de [BC] est un axe de symétrie d'où $OA = OD$ et $OB = OC$.
 Comme $2\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux d'où les droites (OI) et (BD) sont perpendiculaires.

Exercice 7 – Puissance d'un point par rapport à un cercle

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon R. On appelle *puissance du point M par rapport au cercle C* le nombre $p(M) = MO^2 - R^2$

- a. Montrer que si on considère un point M et une droite du plan passant par M tels que la droite d coupe le cercle $\mathcal{C}$ en deux points A et B, alors $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = p(M)$.
 (on pourra introduire le point D diamétralement opposé au point A sur le cercle $\mathcal{C}$).
- b. Montrer que si une droite d passant par M est tangente au cercle $\mathcal{C}$ en T alors $MT^2 = p(M)$.
- c. Etudier le signe de $p(M)$ suivant la position du point M par rapport au cercle $\mathcal{C}$.
- d. Soit $\mathcal{C}'$ un cercle de centre O' et de rayon R'. On suppose que les deux cercles ont des centres distincts. Déterminer l'ensemble des points M du plan ayant même puissance par rapport aux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Traiter le cas particulier où les deux cercles ont même rayon.

- a. Soit D le point diamétralement opposé à A sur le cercle $\mathcal{C}$.

Le triangle ABD est alors rectangle en B

donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$

Or $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MD} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA})$

Soit $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = MO^2 - OA^2 = MO^2 - R^2$

D'où $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MO^2 - R^2 = p(M)$.

- b. Si T est le point où la droite D est tangente, alors

$$\overrightarrow{MO}^2 = (\overrightarrow{MT} + \overrightarrow{TO})^2 = \overrightarrow{MT}^2 + 2\overrightarrow{MT} \cdot \overrightarrow{TO} + \overrightarrow{TO}^2$$

Soit $MO^2 = MT^2 + R^2$ car, par définition du point T, $\overrightarrow{MT} \cdot \overrightarrow{TO} = 0$.

On a donc bien $MT^2 = MO^2 - R^2 = p(M)$.

- c. Comme $p(M) = MO^2 - R^2$ le signe de $p(M)$ est déterminé par la distance de M à O :

- Si $MO < R$ c'est-à-dire M est à l'intérieur du cercle $\mathcal{C}$, alors $p(M) < 0$;
- Si $MO = R$ c'est-à-dire M appartient au cercle $\mathcal{C}$, alors $p(M) = 0$;
- Si $MO > R$ c'est-à-dire M est à l'extérieur du cercle $\mathcal{C}$, alors $p(M) > 0$.

- d. Soit $p'(M)$ la puissance d'un point M par rapport au cercle $\mathcal{C}'$.

Alors $p'(M) = MO'^2 - R'^2$ et $p(M) = p'(M)$ équivaut à

$$MO^2 - R^2 = MO'^2 - R'^2 \text{ soit } MO^2 - MO'^2 = R^2 - R'^2.$$

Or $MO^2 - MO'^2 = \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{MO'}^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MO'}) \cdot (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MO'})$

Soit $MO^2 - MO'^2 = 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{O'O}$ si on note I le milieu de [OO'].

Soit H le projeté orthogonal de M sur la droite (OO'), on a donc

$$MO^2 - MO'^2 = 2\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{O'O} = 2\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{OO'}.$$

Un point M a donc même puissance par rapport aux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ si et seulement si son projeté orthogonal H sur la droite (OO') vérifie

$$2\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{OO'} = R^2 - R'^2$$

En particulier, si les deux cercles ont même rayon, l'ensemble des points ayant même puissance par rapport aux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ est la médiatrice du segment [OO'].

