ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Année 2023-2024 — **Stage « filé »**

Classe de première — **Fiche numéro 1**

Parution lundi 16 octobre — **Retour attendu pour le lundi 6 novembre**

Dans cette fiche, chaque énoncé d'exercice est précédé de quelques rappels constituant des outils pour traiter l'exercice.

Exercice 1 Divers types de raisonnement

En mathématiques, on énonce des *définitions* et on établit des *théorèmes*. Tout théorème énonce une vérité qui vaut pour tous les types d'objets concernés. On établit un théorème (ou une propriété) grâce à un *raisonnement* (une *démonstration*). Il existe divers types de raisonnements. Le plus souvent utilisé est le raisonnement déductif (construit à l'aide d'une suite d'implications) mais d'autres types de raisonnement peuvent s'avérer plus appropriés.
L'objectif de cet exercice est de bien appréhender trois types de raisonnement : le raisonnement par contre-exemple, le raisonnement par l'absurde et le raisonnement par disjonction de cas.

1. Contre-exemple

Une affirmation mathématique qui a l'allure d'un théorème n'en est pas un si un des objets dont elle traite apporte la contradiction. On dit qu'on a affaire à un contre-exemple : un exemple d'objet mathématique (nombres, figures géométriques, fonctions…) pour lequel l'affirmation est fausse.

Peut-on affirmer que :

a. deux rectangles de même périmètre ont la même aire ?

b. pour tous réels x et y positifs, $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$?

1. a. Un rectangle de dimensions 3 et 4 a pour périmètre $2 \times 3 + 2 \times 4 = 14$ et pour aire $3 \times 4 = 12$.
Un rectangle de dimensions 2 et 5 a pour périmètre $2 \times 2 + 2 \times 5 = 14$ et pour aire $2 \times 5 = 10$.
Cela prouve que deux rectangles peuvent avoir le même périmètre mais des aires différentes.

b.
$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ et $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$. Cela prouve que l'affirmation donnée est fausse.
Remarque : on démontre en revanche que, pour tous réels x et y positifs, $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

2. Par l'absurde

Utiliser un raisonnement par l'absurde pour démontrer la véracité d'une affirmation consiste à montrer que le contraire de cette affirmation est faux. Dans le cas d'une implication, cela revient à supposer que la conclusion est fausse pour aboutir à une contradiction.

a. On considère un carré ayant pour aire 170. Montrer que la longueur de ses côtés est strictement supérieure à 13.

b. On considère un rectangle ayant pour aire 170. Montrer que sa longueur est strictement supérieure à 13.

c. Montrer que si n est un entier dont le carré est impair alors n est impair.

2. a. Considérons un carré ayant pour aire 170. Si la longueur des côtés du carré est inférieure ou égale à 13, alors l'aire du carré est inférieure ou égale à 169, ce qui contredit le fait que l'aire du carré vaut 170.
Remarque : le contraire de « strictement supérieure à » (inégalité stricte) est « inférieure ou égale à » (inégalité large).

b. Considérons un rectangle ayant pour aire 170. Si la longueur du rectangle est inférieure ou égale à 13, comme la largeur est inférieure ou égale à la longueur, l'aire du rectangle est inférieure ou égale à $13 \times 13 = 169$, ce qui contredit le fait que l'aire du rectangle est supérieure à 170.

c. Considérons un entier n dont le carré est impair. Si n est pair alors il existe un entier k tel que $n = 2k$. On a ainsi $n^2 = 4k^2 = 2 \times 2k^2$, ce qui est un nombre pair, ce qui contredit le fait que le carré de n est impair.

3. Par disjonction des cas

Le raisonnement par disjonction de cas est une forme de raisonnement mathématique qui consiste à décomposer la proposition que l'on cherche à démontrer en un nombre fini de cas (sous-propositions) vérifiés indépendamment, ces cas ne se chevauchant pas et couvrant à eux tous toutes les possibilités (on parle alors de *partition* des cas).

a. Montrer que pour tout entier n, $n(n+1)(2n+1)$ est un multiple de 3 (on étudiera les 3 cas correspondant aux restes possibles de la division euclidienne de n par 3).

b. Montrer que pour tous réels a et b, si $Max(a,b)$ désigne le plus grand des nombres a et b, alors

$$Max(a,b) = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|).$$

3. a. Un entier est un multiple de 3 signifie qu'il est le produit de 3 par un entier.
De plus, le reste de la division euclidienne de n par 3 vaut 0, 1 ou 2 (entier naturel inférieur strictement à 3).

- Si ce reste vaut 0, il existe un entier k tel que $n = 3k$ et $N = n(n+1)(2n+1) = \mathbf{3}k(3k+1)(6k+1) = 3K$ où $K = k(3k+1)(6k+1)$ d'où N est un multiple de 3.
- Si ce reste vaut 1, il existe un entier k tel que $n = 3k+1$ et $2n+1 = 6k+3 = 3(2k+1)$,
$N = \mathbf{3}(3k+1)(3k+2)(2k+1)$ d'où N est un multiple de 3.
- Si ce reste vaut 2, il existe un entier k tel que $n = 3k+2$ et $n+1 = 3k+3 = 3(k+1)$,
$N = \mathbf{3}(3k+2)(k+1)(6k+5)$ d'où N est un multiple de 3.

Conclusion, tous les cas étant traités : N est un multiple de 3.

b. Si $a \leq b$, alors $Max(a,b) = b$ et $\frac{1}{2}(a+b+|a-b|) = \frac{1}{2}(a+b+b-a) = b$
donc $Max(a,b) = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$.
Si $a > b$, alors $Max(a,b) = a$ et $\frac{1}{2}(a+b+|a-b|) = \frac{1}{2}(a+b+a-b) = a$
donc $Max(a,b) = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$.

Conclusion, tous les cas étant traités : $Max(a,b) = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$.

Autour des inégalités

Quelques principes de base dans le traitement d'inégalités :
(1) Pour comparer deux nombres, on peut étudier le signe de leur différence.
(2) Pour comparer deux nombres positifs, on peut comparer leurs carrés.

Exercice 2 Encadrements et valeurs approchées par excès

Les lectures graphiques de positions relatives de courbes donnent des approximations pouvant conduire à des conjectures. Le calcul algébrique assure des affirmations s'appuyant sur les propriétés des inégalités.

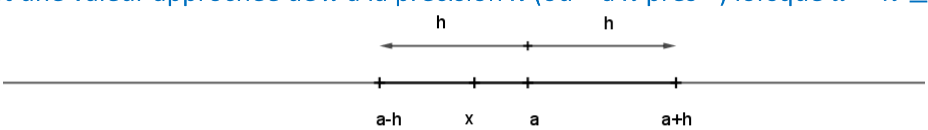
On considère les fonctions f, g et h définies sur $]-1,+\infty[$ par $f(x) = 1-x$, $g(x) = \frac{1}{1+x}$ et $h(x) = 1-x+x^2$.

1. Représenter ces trois fonctions dans un repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et conjecturer des inégalités vérifiées pour tout réel x de $]-1,+\infty[$ entre $f(x), g(x)$ et $h(x)$.

2. Étudier, suivant les valeurs de x dans $]-1,+\infty[$, le signe de $g(x)-f(x)$ et de $h(x)-g(x)$.

<u>Quelques définitions :</u>
Soit a et x deux nombres réels et soit h un réel strictement positif.

- On dit que a est une valeur approchée de x à la précision h (ou « à h près ») lorsque $a-h \leq x \leq a+h$.

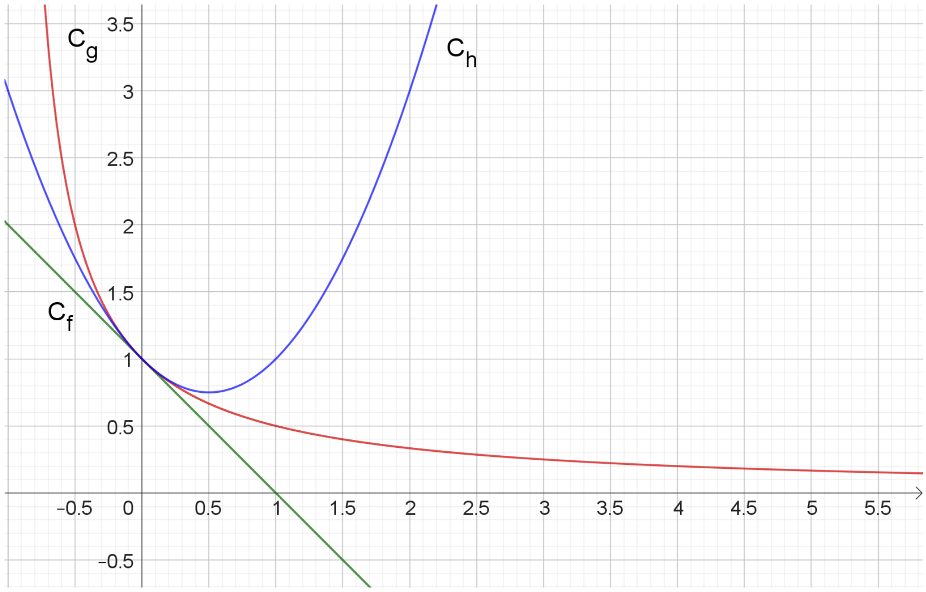


Cela signifie que la distance entre les réels a et x est inférieure ou égale à h.

- On dit que a est une valeur approchée de x par défaut à la précision h (ou « à h près ») lorsque $a \leq x \leq a+h$.
- On dit que a est une valeur approchée de x par excès à la précision h (ou « à h près ») lorsque $a-h \leq x \leq a$.

3. En déduire l'écriture décimale d'une valeur approchée à 10^{-20} de $\frac{1}{1+10^{-10}}$.

1. La courbe représentative de f est une droite, celle de g une hyperbole (image de la courbe représentative de la fonction inverse par la translation de vecteur $-\vec{\imath}$) et celle de h une parabole dont l'équation peut s'écrire $y = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ et dont le sommet est le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$.



Sur $]-1, +\infty[$, la courbe C_f semble en-dessous des deux autres courbes.
La courbe C_h semble en-dessous de la courbe C_g sur $]-1,0]$ et au-dessus sur $[0, +\infty[$.

2. Pour tout x de $]-1, +\infty[$, $g(x) - f(x) = \frac{1}{1+x} - (1-x) = \frac{1-(1+x)(1-x)}{1+x} = \frac{1-(1-x^2)}{1+x} = \frac{x^2}{1+x}$.
Or, pour tout x de $]-1, +\infty[$, $1 + x > 0$ et $x^2 \geq 0$ donc $g(x) \geq f(x)$ c'est-à-dire C_f est en-dessous de C_g.
Pour tout x de $]-1, +\infty[$, $h(x) - g(x) = 1 - x + x^2 - \frac{1}{1+x} = \frac{(1-x+x^2)(1+x)-1}{1+x} = \frac{1-x+x^2+x-x^2+x^3-1}{1+x} = \frac{x^3}{1+x}$.
Si $x \in]-1,0]$, alors $h(x) \leq g(x)$ et C_g est en-dessous de C_h. Si $x \in [0, +\infty[$, $h(x) \geq g(x)$ et C_g est au-dessus de C_h.

3. Pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Donc $0 \leq 1 - 10^{-10} \leq \frac{1}{1+10^{-10}} \leq 1 - 10^{-10} + 10^{-20}$.
Une valeur approchée à 10^{-20} de $\frac{1}{1+10^{-10}}$ est donc **toute valeur** comprise entre $1 - 10^{-10} = 0{,}999\,999\,999\,9$ et $1 - 10^{-10} + 10^{-20} = 0{,}999\,999\,999\,900\,000\,000\,01$.

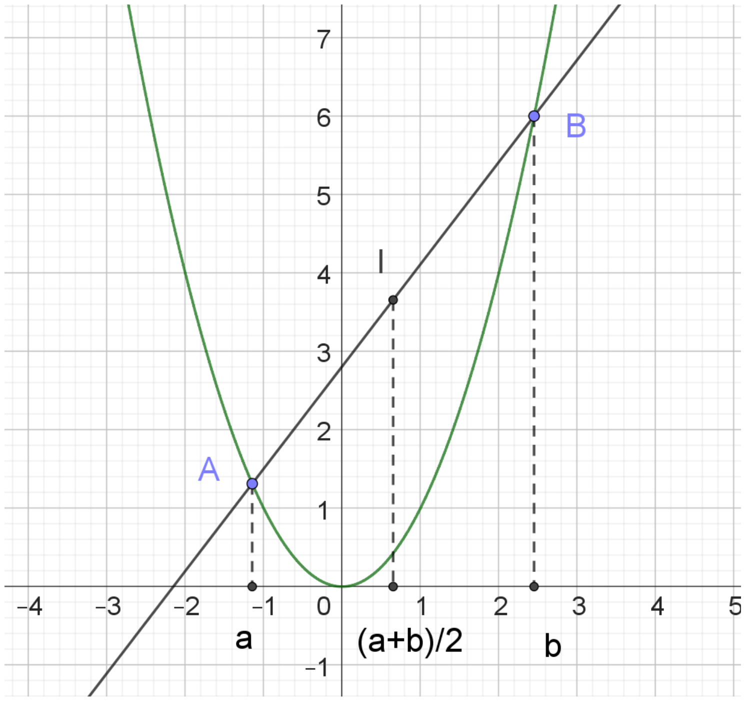
Exercice 3 Convexité, concavité

Soit f la fonction carré et $\mathcal{P}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Montrer que pour tous réels a et b, $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$.
2. Interpréter graphiquement cette inégalité.
3. En déduire, si a et b sont positifs, une inégalité entre $\frac{a+b}{2}$ et $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ et en donner une interprétation graphique.

1. Pour tous réels a et b, $\frac{f(a)+f(b)}{2} - f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{2}(a^2+b^2) - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - a^2 - 2ab - b^2)$,
soit $\frac{f(a)+f(b)}{2} - f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - 2ab) = \frac{1}{4}(a-b)^2$.
Un carré étant toujours positif ou nul, on a bien $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$.

2. Soit A et B les points de la courbe P d'abscisses respectives a et b . Ces points ont pour coordonnées respectives $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{(f(a)+f(b))}{2}\right)$.
Cette inégalité revient donc à dire que le point de la parabole P d'abscisse $\frac{a+b}{2}$ est situé en dessous du point I.



3. On a démontré que $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$ c'est-à-dire $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.
Tous ces nombres sont positifs. Ils sont donc rangés dans le même ordre que leurs racines carrées, ce qui donne $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Avec la fonction racine carrée, on peut faire un raisonnement analogue à celui fait avec la fonction carré et en déduire que pour cette fonction, c'est le milieu qui est au-dessus du point de la courbe de même abscisse $\frac{a+b}{2}$.

Remarque : on montre plus généralement que pour tout nombre réel x compris entre a et b, il existe un réel $t \in [0,1]$ tel que $x = ta + (1-t)b$ et qu'alors $f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$, ce qui signifie que toute sécante à la courbe P en deux points A $(a, f(a))$et $B(b, f(b))$ est située au-dessus de la courbe P sur l'intervalle $[a, b]$.
*On dit que la fonction carré est une fonction **convexe**.*

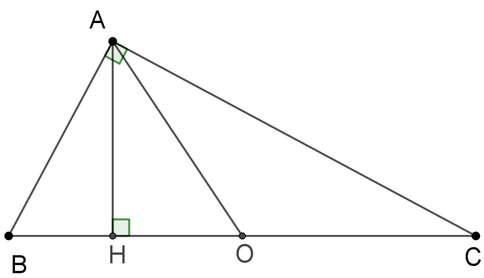
Exercice 4 Relations métriques dans un triangle rectangle

Dans un problème faisant intervenir des relations métriques dans un triangle rectangle, on pense évidemment au théorème de Pythagore mais on peut aussi faire appel :

- aux triangles semblables ou aux triangles isométriques ;
- à des calculs d'aires
- à une transformation conservant les distances (symétrie, translation, rotation)

Soit ABC un triangle rectangle en A. On note H le pied de la hauteur issue de A et O le milieu du segment [BC].
Montrer que :
(1) $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{BH} \times \mathrm{BC}$ et $\mathrm{AC}^2 = \mathrm{CH} \times \mathrm{CB}$.
(2) $\mathrm{AH}^2 = \mathrm{BH} \times \mathrm{CH}$.
(3) $\mathrm{AH} \times \mathrm{BC} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AC}$.
(4) $\mathrm{OA} = \frac{1}{2}\mathrm{BC}$.

(1) Les triangles ABH et ABC sont semblables puisqu'ils ont deux angles de même mesure (ils sont rectangles et ont l'angle en B en commun). Donc $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BH}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$ ce qui s'écrit aussi $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{BH} \times \mathrm{BC}$.
On procède de même pour l'autre égalité en considérant les triangles ACH et ABC.
(2) Les triangles ABH et ACH sont semblables. En effet le triangle ABC est rectangle en A.
donc $\widehat{\mathrm{ACH}} = \widehat{\mathrm{ACB}} = 90° - \widehat{\mathrm{ABC}} = 90° - \widehat{\mathrm{ABH}}$.



Les triangles ABH et ACH sont rectangles en H donc $\widehat{\mathrm{BAH}} = 90° - \widehat{\mathrm{ABH}} = \widehat{\mathrm{ACH}}$. Ils ont donc deux angles de même mesure.
On en déduit que $\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{BH}} = \frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{AH}}$ soit $\mathrm{AH}^2 = \mathrm{BH} \times \mathrm{CH}$.

(3) On calcule de deux manières l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC : $\mathcal{A} = \frac{\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}}{2} = \frac{\mathrm{AH}\times\mathrm{BC}}{2}$.

(4) On considère le symétrique D de A par rapport à O. O est alors le milieu commun à [AD] et [BC]. Le quadrilatère ABDC qui a de plus un angle droit est donc un rectangle. Ses diagonales ont donc même longueur, d'où

$$\mathrm{OA} = \frac{1}{2}\mathrm{AD} = \frac{1}{2}\mathrm{BC}$$

Définition : Soit n un entier naturel, on appelle fonction polynôme (ou polynôme) de degré n, une fonction P pour laquelle il existe des réels $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ tels que $a_n \neq 0$ et pour tout réel x, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

Les réels $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ sont appelés les coefficients de P.

Propriété : soit P et Q deux fonctions polynômes. P et Q sont égales (c'est-à-dire pour tout réel x, $P(x) = Q(x)$) si et seulement si P et Q ont même degré et les mêmes coefficients.

Exercice 5

Remarquons pour commencer que $1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 = 25$, $2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1 = 121$, etc. Il semble que chaque fois qu'on ajoute 1 au produit de quatre entiers consécutifs, on obtient un carré parfait (c'est-à-dire le carré d'un entier). L'objectif de cet exercice est de prouver ce résultat.

1. Développer le polynôme $P(x) = x(x+1)(x+2)(x+3) + 1$.
2. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout réel x, $P(x) = (x^2 + ax + b)^2$.
3. Conclure.

1. Pour tout réel x, $P(x) = x(x+1)(x+2)(x+3) + 1 = (x^2+x)(x^2+5x+6) + 1$
   soit $P(x) = x^4 + x^3 + 5x^3 + 5x^2 + 6x^2 + 6x + 1 = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1$.
2. Pour tout réel x, $(x^2+ax+b)^2 = x^4 + a^2x^2 + b^2 + 2ax^3 + 2bx^2 + 2abx = x^4 + 2ax^3 + (a^2+2b)x^2 + 2abx + b^2$.

D'après la propriété rappelée avant l'énoncé, on aura pour tout réel x, $P(x) = (x^2+ax+b)^2$ si et seulement si a et b vérifient le système d'équations :

$\begin{cases} 2a = 6 \\ a^2 + 2b = 11 \\ 2ab = 6 \\ b^2 = 1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = 3 \\ 2b = 2 \\ b = 1 \\ b^2 = 1 \end{cases}$ c'est-à-dire $a = 3$ et $b = 1$.

3. On vient de démontrer que pour tout réel x, $x(x+1)(x+2)(x+3) + 1 = (x^2+3x+1)^2$.
   En particulier, pour tout entier n, si on ajoute 1 au produit des quatre entiers consécutifs, $n, n+1, n+2, n+3$, on obtient le carré de l'entier $n^2 + 3n + 1$.