Pépinière académique de mathématiques

Année 2022-2023 **Stage « filé »**

Classe de première **Fiche numéro 1**

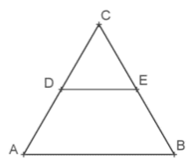
Parution mercredi 3 octobre **Retour attendu pour le vendredi 20 octobre**

Exercice 1 À la recherche de contre-exemples

En mathématiques, on énonce des *définitions* et on établit des *théorèmes*. Tout théorème énonce une vérité qui vaut pour tous les types d'objets concernés. Une affirmation mathématique qui a l'allure d'un théorème n'en est pas un si un des objets dont elle traite apporte la contradiction. On dit qu'on a affaire à un contre-exemple.

1. Une équation polynomiale du second degré a-t-elle toujours deux solutions réelles ?
2. La somme de deux nombres premiers est-elle toujours un nombre premier ? un nombre pair ?
3. Est-il vrai que tout quadrilatère du plan ayant trois côtés de même longueur est un losange ?
4. Calculer le nombre $N = n^2 + n + 41$ pour toutes les valeurs de n strictement inférieures à 40. Peut-on en déduire que l'entier N est un nombre premier pour toutes les valeurs de n ?

1. Non car, par exemple, l'équation $x^2 + 1$ n'admet pas de solution dans l'ensemble des réels, un carré étant positif.
2. Non car $2 + 7 = 9$ et 9 n'est pas un nombre premier et non car $2 + 3 = 5$ et 5 est un nombre impair.
3. Le quadrilatère ADEB a pour sommets les point A et B, sommets du triangle équilatéral ABC et D et E, milieux des côtés [CA] et [CB].
   On a donc AD = DE = EB, mais le quatrième côté, [AB], n'a pas la même longueur.



4. Les valeurs obtenues pour N lorsque n varie de 0 à 39 sont successivement :
   41, 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151, 173, 197, 223, 251, 281,313, 347, 383, 421, 461, 503, 547, 593, 641, 691, 743, 797, 853, 911, 971, 1033, 1097, 1163, 1231, 1301, 1373, 1447, 1523, 1601.
   On peut tester certaines de ces valeurs et constater qu'il s'agit de nombres premiers mais on remarque que : $40^2 + 40 + 41 = 40(40 + 1) + 41 = 41 \times 41$ ou que $41^2 + 41 + 41 = 41 \times 43$. L'un de ces deux calculs suffit à prouver que N n'est pas un nombre premier pour toutes les valeurs de n.

Exercice 2 Exercice pas commode

Cet exercice propose quelques utilisations du *Principe des tiroirs* (ou *Principe de Dirichlet,* d'après Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, mathématicien allemand, on trouve aussi l'expression anglaise *pigeonhole principle*). Lorsqu'on range n objets dans un meuble ayant moins de n tiroirs, l'un des tiroirs contient au moins deux objets.

Ce principe est un outil puissant dans des raisonnements en mathématiques.

Justifier les affirmations suivantes :

a) Sachant qu'un individu n'a jamais plus de 350 000 cheveux sur la tête, au moins deux personnes habitant Paris ont le même nombre de cheveux.
b) Soit a, b et c trois nombres entiers. Montrer que le produit $(a-b)(b-c)(c-a)$ est un nombre pair.
c) Si on considère 12 nombres entiers distincts compris entre 1 et 99, on peut en trouver deux tels que leur différence (positive) soit un nombre jumeau (un nombre à deux chiffres identiques).
d) Soit n un entier supérieur ou égal à 1, alors dans tout sous-ensemble E de $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ contenant $n+1$ éléments, il existe deux entiers distincts a et b tels que a divise b. (on pourra remarquer que tout élément de $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ peut s'écrire de manière unique $2^r p$ où r est un entier positif ou nul et p un entier impair).

a) Principe des tiroirs associés au nombres de cheveux et classement des parisiens en nombre bien plus grand que 350 000.
b) Principe des tiroirs : pour un entier, il n'y a que deux possibilités)pair ou impair). Donc si on prend trois entiers deux au moins ont la même parité et leur différence est paire. Le produit $(a-b)(b-c)(c-a)$ est donc pair.
c) Principe des tiroirs : parmi ces 12 nombres distincts, il en existe toujours deux qui ont le même reste dans la division euclidienne par 11. Leur différence est alors un multiple de 11 et comprise entre 1 et 99. C'est donc un nombre jumeau.

d) Principe des tiroirs : chaque élément de $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ peut s'écrire $2^r p$ où r est un entier positif ou nul et p un entier impair (vrai pour tout entier naturel) tel que $1 \leq p \leq 2n-1$, ce qui ne donne que n possibilités pour p.
Or le sous ensemble E a $n+1$ éléments. Deux d'entre eux, a et b, sont donc associés au même entier p. Il existe donc deux entiers r et s distincts (par exemple $r < s$) tels que $a = 2^r p$ et $b = 2^s p$ et, comme $r < s$, a divise b.

Exercice 3 Polynômes et nombres premiers

Définition : On dit qu'un entier naturel est premier lorsqu'il a exactement deux diviseurs 1 et lui-même.
Pour factoriser une expression littérale, on peut :
- trouver un facteur commun ;
- utiliser une identité remarquable, notamment, pour tous nombres a et b, $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$;
- faire apparaitre une identité remarquable (on parle alors de « factorisation forcée »).

Dans cet exercice, on cherche s'il existe des entiers naturels n tels que le nombre $N = n^4 + n^2 + 25$ soit un nombre premier.

1. En complétant l'égalité $x^4 + 25 = (x^2+5)^2 - \cdots$, déterminer deux polynômes P et Q tels que, pour tout réel x, $x^4 + x^2 + 25 = P(x) \times Q(x)$.
2. Montrer que les équations $P(x) = 1$ et $Q(x) = 1$ n'ont pas de solutions.
3. Conclure.

1. $x^4 + 25 = (x^2+5)^2 - 10x^2$ donc $x^4 + x^2 + 25 = (x^2+5)^2 - 9x^2$.
Soit $x^4 + x^2 + 25 = (x^2+5+3x)(x^2+5-3x)$ et on peut poser $P(x) = x^2 + 3x + 5$ et $Q(x) = x^2 - 3x + 5$.
2. L'équation $P(x) = 1$ s'écrit $x^2 + 3x + 4 = 0$. Son discriminant est négatif. Il n'y a donc pas de solution.
L'équation $Q(x) = 1$ s'écrit $x^2 - 3x + 4 = 0$. Son discriminant est négatif. Il n'y a donc pas de solution.
3. Pour tout entier naturel n, l'entier naturel $N = n^4 + n^2 + 25$ est donc le produit de deux entiers naturels $P(n)$ et $Q(n)$ qui sont différents de 1. Il n'existe donc pas d'entier naturel n tel que N soit un nombre premier.

Exercice 4 Différences finies et calculs de sommes

Définition : Soit n un entier naturel, on appelle fonction polynôme (ou polynôme) de degré n, une fonction P pour laquelle il existe des entiers $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ tels que $a_n \neq 0$ et pour tout réel x, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.
Les réels $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ sont appelés les coefficients de P.
Propriété : soit P et Q deux fonctions polynômes. P et Q sont égales (c'est-à-dire pour tout réel x, $P(x) = Q(x)$) si et seulement si P et Q ont même degré et les mêmes coefficients.

1. a) Déterminer les polynômes P de degré 2 tel que, pour tout réel x, $P(x+1) - P(x) = x$.
b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. a) Déterminer les polynômes Q de degré 3 tel que, pour tout réel x, $Q(x+1) - Q(x) = x^2$.
b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1. a) Comme P est un polynôme de degré 2, il existe trois réels a $(a \neq 0)$, b et c tels que, pour tout réel x, $P(x) = ax^2 + bx + c$.
Alors $P(x+1) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c = a(x^2 + 2x + 1) + b(x+1) + c$
et $P(x+1) - P(x) = (a-a)x^2 + (2a + b - b)x + a + b + c - c = 2ax + (a+b)$
On a donc pour tout réel x, $P(x+1) - P(x) = x$ si et seulement si $2a = 1$ et $a + b = 0$ soit $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$.
Les polynômes qui conviennent sont donc définis par, pour tout réel x, $P(x) = \frac{1}{2}(x^2 - x) + c$, où c est un réel quelconque.
b) En s'appuyant sur la question précédente, on remarque que, pour tout entier naturel n,
$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \big(P(2) - P(1)\big) + \big(P(3) - P(2)\big) + \cdots + \big(P(n) - P(n-1)\big) + \big(P(n+1) - P(n)\big)$$
Soit, en simplifiant deux à deux les termes sauf le premier et le dernier,
$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = -P(1) + P(n+1) = -c + \frac{1}{2}\big((n+1)^2 - (n+1)\big) + c = \frac{1}{2}(n^2 + n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$
2. a) Il existe de même quatre réels a, b, c et d tels que, pour tout réel x, $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
On a alors $Q(x+1) = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$

Soit $Q(x+1) = a(x^3+3x^2+3x+1) + b(x^2+2x+1) + c(x+1) + d$
Et $Q(x+1) - Q(x) = (a-a)x^3 + (3a+b-b)x^2 + (3a+2b+c-c)x + (a+b+c+d-d)$.
Soit $Q(x+1) - Q(x) = 3ax^2 + (3a+2b)x + a+b+c$.
On a donc pour tout réel x, $Q(x+1) - Q(x) = x^2$ si et seulement si $3a = 1$, $3a+2b = 0$ et $a+b+c = 0$
C'est-à-dire $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{3}{2}a = -\frac{1}{2}$ et $c = -a-b = -\frac{1}{3}+\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.
Les polynômes qui conviennent sont donc définis par, pour tout réel x, $Q(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x + d$, où d est un réel quelconque.
Par le même raisonnement qu'à la question précédente, on en déduit que, pour tout entier naturel n,
$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = -Q(1) + Q(n+1) = \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{6}(n+1)$
Soit $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{1}{6}(n+1)(2(n+1)^2 - 3(n+1)+1) = \frac{1}{6}(n+1)(2n^2+4n+2-3n-3+1)$
Soit $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{1}{6}(n+1)(2n^2+n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
Remarque : en utilisant la même méthode que dans les questions précédentes, on peut montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Exercice 5 Multiples et diviseurs

Définition : on dit qu'un nombre entier m est un multiple d'un entier p s'il existe un entier k tel que $m = kp$.
On peut dire aussi que l'entier p divise m, mais attention à ne pas écrire de *quotient*, car on sortirait de l'arithmétique.
Propriété : si un nombre entier a est multiple de deux nombres entiers b et c, alors il est multiple du nombre $b+c$.
Théorème : soit a et b deux entiers naturels tels que $b \neq 0$, il existe un unique couple d'entiers naturels (q,r) tel que $a = bq + r$ et $r < b$.
On dit alors que q et r sont respectivement le quotient et le reste dans la division euclidienne de a par b.

1. Montrer qu'un entier N dont l'écriture décimale est $\overline{cdu}$ est un multiple de 8 si et seulement si $4c+2d+u$ est un multiple de 8.
2. Montrer que qu'un entier N de quatre chiffres est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres en écriture décimale est un multiple de 9. Expliquer comment généraliser ce résultat.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, le produit $n(2n+1)(7n+1)$ est un multiple de 6. On pourra considérer les restes de la division euclidienne de n par 6.

1. Soit $N = 100c + 10d + u$.
Alors on peut aussi écrire $N = 96c + 8d + 4c + 2d + u = 8(12c+d) + 4c + 2d + u$.
D'après la définition de multiple, $8(12c+d)$ est un multiple de 8 donc, d'après la propriété rappelée :
- si N est un multiple de 8 alors $N - 8(12c+d)$ est un multiple de 8 soit $4c+2d+u$ est un multiple de 8 ;
- réciproquement, si $4c+2d+u$ est un multiple de 8 alors $4c+2d+u\ + 8(12c+d)$ est un multiple de 8 soit N est un multiple de 8.
2. Il existe quatre entiers a, b, c, d compris entre 0 et 9 tels que $N = 1\,000a + 100b + 10c + d$.
On peut alors écrire $N = 999a + 99b + 9c + (a+b+c+d) = 9(111a + 11b + c) + a + b + c + d$.
Un raisonnement analogue à celui de la question précédente permet d'affirmer que N est un multiple de 9 si et seulement si $a+b+c+d$ est un multiple de 9.
On peut généraliser ce résultat à un entier naturel quelconque N. Il existe en effet un entier n et des entiers $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ tels que $N = 10^n a_n + 10^{n-1}a_{n-1} + \dots + 100a_2 + 10a_1 + a_0$
Soit $N = 9\left(\underbrace{11\dots1}_{n-1 \text{ termes}} a_n + \dots + 99a_2 + 9a_1 + a_0\right) + a_n + \dots + a_2 + a_1 + a_0$. Le même raisonnement que précédemment conduit au faiit que N est un multiple de 9 si et seulement si $a_n + \dots + a_2 + a_1 + a_0$ est un multiple de 9.
Remarque : on démontre de même le critère de divisibilité par 3.
3. Pour chaque entier n, il existe un couple d'entiers naturels (q,r) tels que $n = 6q + r$ et $r < 6$. D'autre part, factoriser par 6 revient à factoriser par 2 et par 3 (car 2 et 3 sont des nombres premiers).
On peut alors retrouver tous les cas possibles pour le produit $P_n = n(2n+1)(7n+1)$ dans le tableau ci-dessous, en cherchant à chaque fois à mettre 2 et 3 en facteur.

n	$6q$	$6q+1$	$6q+2 = 2(3q+1)$
$2n+1$		$12q+3 = 3(4q+1)$	$12q+5$
$7n+1$		$42q+8 = 2(21q+4)$	$42q+15 = 3(14q+5)$

P_n	$\mathbf{6}q(2n+1)(7n+1)$	$\mathbf{6}(4q+1)\,(21q+4)(6q+1)$	$\mathbf{6}(3q+1)(12q+5)(14q+5)$

n	$6q+3=3(2q+1)$	$6q+4=2(3q+2)$	$6q+5$
$2n+1$	$12q+7$	$12q+9=3(4q+3)$	$12q+11$
$7n+1$	$42q+22=2(21q+11)$	$42q+29$	$42q+36=6(7q+6)$
P_n	$\mathbf{6}(2q+1)(12q+7)(21q+11)$	$\mathbf{6}(3q+2)(4q+3)(42q+29)$	$\mathbf{6}(6q+5)(12q+11)(7q+6)$

Dans tous les cas, P_n est le produit d'un entier par 6 donc un multiple de 6.

Exercice 6. Relations métriques dans un triangle rectangle

Dans un problème faisant intervenir des relations métriques dans un triangle rectangle, on pense évidemment au théorème de Pythagore mais on peut aussi faire appel :

- aux triangles semblables ou aux triangles isométriques ;
- à des calculs d'aires
- à une transformation conservant les distances (symétrie, translation, rotation)

Soit ABC un triangle rectangle en A. On note H le pied de la hauteur issue de A et O le milieu du segment [BC].

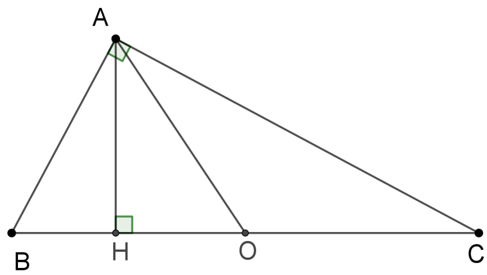
Montrer que :

(1) $\mathrm{AB}^2=\mathrm{BH}\times\mathrm{BC}$ et $\mathrm{AC}^2=\mathrm{CH}\times\mathrm{CB}$.

(2) $\mathrm{AH}^2=\mathrm{BH}\times\mathrm{CH}$.

(3) $\mathrm{AH}\times\mathrm{BC}=\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}$.

(4) $\mathrm{OA}=\frac{1}{2}\mathrm{BC}$.



(1) Les triangles ABH et ABC sont semblables puisqu'ils ont deux angles de même mesure (ils sont rectangles et ont l'angle en B en commun). Donc $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BH}}=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$ ce qui s'écrit aussi $\mathrm{AB}^2=\mathrm{BH}\times\mathrm{BC}$.

On procède de même pour l'autre égalité en considérant les triangles ACH et ABC.

(2) Les triangles ABH et ACH sont semblables. En effet le triangle ABC est rectangle en A.

donc $\widehat{\mathrm{ACH}}=\widehat{\mathrm{ACB}}=90°-\widehat{\mathrm{ABC}}=90°-\widehat{\mathrm{ABH}}$.

Les triangles ABH et CBH sont rectangles en H donc $\widehat{\mathrm{BAH}}=90°-\widehat{\mathrm{ABH}}=\widehat{\mathrm{ACH}}$. Ils ont donc deux angles de même mesure.

On en déduit que $\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{BH}}=\frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{AH}}$ soit $\mathrm{AH}^2=\mathrm{BH}\times\mathrm{CH}$.

(3) On calcule de deux manières l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC : $\mathcal{A}=\frac{\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}}{2}=\frac{\mathrm{AH}\times\mathrm{BC}}{2}$.

(4) On considère le symétrique D de A par rapport à O. O est alors le milieu commun à [AD] et [BC]. Le quadrilatère ABDC qui a de plus un angle droit est donc un rectangle. Ses diagonales ont donc même longueur, d'où

$$\mathrm{OA}=\frac{1}{2}\mathrm{AD}=\frac{1}{2}\mathrm{BC}$$

Exercice 7. Comparaison de moyennes

Trois principes de base :

(1) Pour comparer deux nombres on peut étudier le signe de leur différence.

(2) Pour comparer deux nombres positifs, on peut comparer leurs carrés.

(3) Pour étudier le signe d'une expression, on peut l'écrire sous forme de produit ou de quotient.

1. Étude algébrique

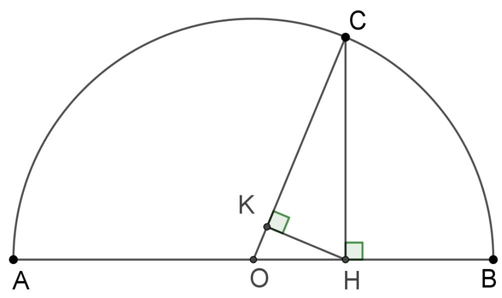
Soit a et b deux nombres réels strictement positifs, on appelle respectivement moyenne arithmétique, moyenne géométrique et moyenne harmonique les trois réels suivant :

$m=\frac{a+b}{2}$, $g=\sqrt{ab}$ et $h=\frac{2ab}{a+b}$.

Montrer que pour tous réels strictement positifs a et b, $m\geq g\geq h$.

2. Étude géométrique

Dans la figure ci-contre, si on note $\mathrm{AH} = a$ et $\mathrm{HB} = b$, montrer que :
$\mathrm{OC} = \frac{a+b}{2}$, $\mathrm{CH} = \sqrt{ab}$ et $\mathrm{CK} = \frac{2ab}{a+b}$.
(on pourra utiliser les résultats obtenus dans l'exercice sur les relations métriques dans un triangle rectangle).
Retrouver, grâce à la figure ci-contre, l'encadrement précédemment démontré algébriquement.



1. Étude algébrique

On s'appuie sur le principe (1) puis sur le principe (3) :

$m - g = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}$ ce qui justifie l'inégalité $m \geq g$.

En appliquant l'inégalité précédemment démontrée aux nombres $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$, on obtient $\sqrt{\frac{1}{a} \times \frac{1}{b}} \leq \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$ c'est-à-dire $\sqrt{\frac{1}{ab}} \leq \frac{\frac{a+b}{ab}}{2}$ soit $\frac{1}{\sqrt{ab}} \leq \frac{a+b}{2ab}$. Comme tous les nombres intervenant ici sont positifs, on obtient en prenant les inverses de part et d'autre de la dernière inégalité : $\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$.

2. Étude géométrique

On pose $\mathrm{AH} = a$ et $\mathrm{BH} = b$. On peut affirmer que $\mathrm{OC} \geq \mathrm{CH} \geq \mathrm{CK}$.

On remarque que $m = \mathrm{OA} = \mathrm{OC}$, $\mathrm{CH} = \sqrt{\mathrm{AH} \times \mathrm{BH}} = \sqrt{ab}$ (voir l'égalité (2) de l'exercice sur les relations métriques dans un triangle rectangle, en se plaçant dans le triangle ACB rectangle en C) et $\mathrm{CK} \times \mathrm{CO} = \mathrm{CH}^2$ (en se plaçant dans le triangle CHO pour appliquer l'égalité (1) de l'exercice sur les relations métriques dans un triangle rectangle). Cette dernière égalité s'écrit aussi $\mathrm{CK} = \frac{\mathrm{CH}^2}{\mathrm{CO}}$
c'est-à-dire $\mathrm{CK} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b} = h$. L'encadrement $\mathrm{OC} \geq \mathrm{CH} \geq \mathrm{CK}$ donne donc $m \geq g \geq h$.