



Exercice 1 – Inégalités et calcul littéral

Définition : on dit qu'un nombre a est inférieur ou égal à un nombre b lorsque $b - a \geq 0$.

Cette définition conduit à une méthode pratique pour comparer deux nombres.

Propriété : pour tous réels a et b strictement positifs, si $a \leq b$, alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

- Démontrer que, pour tous réels a, b, c strictement positifs, si $a \leq b + c$ alors $\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}$.
- Soit, pour tout entier naturel non nul n , la somme $S_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$.
 - Justifier que, pour tout entier naturel non nul n , $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.
 - En déduire que, pour tout entier naturel non nul n , $S_n < 1$.
 - Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $|S_n - 1| < 10^{-5}$.

Exercice 2 – Polynômes et somme

Définition : Soit n un entier naturel, on appelle fonction polynôme (ou polynôme) de degré n , une fonction P pour laquelle il existe des réels $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ tels que $a_n \neq 0$ et pour tout réel x , $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.

Les réels $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ sont appelés les coefficients de P .

Propriété : soit P et Q deux fonctions polynômes. P et Q sont égales (c'est-à-dire pour tout réel x , $P(x) = Q(x)$) si et seulement si P et Q ont même degré et les mêmes coefficients.

- Déterminer une fonction polynôme P de degré 3 telle que, pour tout nombre réel x , $P(x+1) - P(x) = x^2$.
- En déduire que, pour tout entier naturel non nul n , $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 3 – Tangentes à une parabole

Propriété : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère. Soit a un réel de l'intervalle I et A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a . Si f est dérivable en a , alors $\mathcal{C}_f$ admet au point A une tangente d'équation $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

La tangente à $\mathcal{C}_f$ en A est donc la droite passant par A et de pente $f'(a)$.

Dans le plan muni d'un repère on considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$.

- Montrer que, passant par le point $C(1, -3)$, il existe deux tangentes à la parabole $\mathcal{P}$ et en donner les équations réduites.
- Plus généralement, on veut déterminer l'ensemble des points $M(x_0, y_0)$ du plan d'où l'on peut mener au moins une tangente à la parabole $\mathcal{P}$.
 - Soit a un nombre réel et $\mathcal{T}$ la tangente à $\mathcal{P}$ au point de $\mathcal{P}$ d'abscisse a . Démontrer que $\mathcal{T}$ passe par M si et seulement si $a^2 - 2ax_0 + y_0 = 0$.
 - En déduire l'ensemble des points $M(x_0, y_0)$ du plan d'où l'on peut mener deux tangentes à la parabole $\mathcal{P}$ et l'ensemble des points $M(x_0, y_0)$ du plan d'où l'on peut mener une seule tangente à la parabole $\mathcal{P}$.

Exercice 4 – Inégalité et fonction convexe

Soit f et g deux fonctions définies sur un même ensemble E et dont les courbes représentatives dans le plan muni d'un repère sont $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Étudier les positions relatives des deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ revient à étudier le signe de $f(x) - g(x)$ sur l'ensemble E .

Soit f la fonction carré et $\mathcal{P}$ sa représentation graphique dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

- Montrer que si A et B sont deux points de $\mathcal{P}$ d'abscisses respectives a et b telles que $a < b$, alors la droite (AB) se situe au-dessus de $\mathcal{P}$ sur l'intervalle $[a, b]$.

On dit alors que la fonction carré est une fonction *convexe*.

2. a. Justifier qu'un point $N(x_N, y_N)$ du plan appartient au segment $[AB]$ si, et seulement si, il existe un réel t tel que $t \in [0,1]$ et $\overrightarrow{NB} = t\overrightarrow{AB}$. En déduire l'expression de x_N et y_N en fonction de a, b et t .
- b. Montrer que la position relative du segment $[AB]$ et de la parabole $\mathcal{P}$ sur l'intervalle $[a, b]$ se traduit par : pour tout réel $t \in [0,1]$, $f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$.
- c. Quelle inégalité vue dans la fiche 2 retrouve-t-on dans le cas où $t = \frac{1}{2}$?

Exercice 5 – Aires maximales, aires minimales

Propriété 1 : l'aire d'un triangle MNP est égale à $\mathcal{A} = \frac{1}{2} MN \times MP \times \sin(\widehat{NMP})$.

Définition : soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $a \in I$, la fonction f admet un maximum en a sur l'intervalle I lorsque, pour tout nombre réel x de I , $f(x) \leq f(a)$.

Propriété 2 : soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit $a \in I$, la fonction f admet un extremum en a si et seulement si sa dérivée f' s'annule en a en changeant de signe.

On considère un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 3$ et $AC = 4$. On note I le milieu du segment $[AC]$. Un point P se déplace sur le segment $[AB]$ et un point Q se déplace sur le segment $[BC]$ de telle façon que l'aire du triangle BPQ reste constante égale à 2. On note $BP = x$ et $BQ = y$.

1. Montrer que $yx = 5$ et en déduire l'intervalle décrit par x et l'intervalle décrit par y .
2. Montrer que l'aire du triangle PIQ est égale à $f(x) = x - 2 + \frac{3}{x}$.
3. En déduire que cette aire admet
 - a. un maximum et préciser le(s) position(s) des points P et Q correspondant à ce maximum.
 - b. un minimum et préciser le(s) position(s) des points P et Q correspondant à ce minimum.

Exercice 6 – Nombres pentagonaux

Définition : on dit qu'une suite (u_n) est arithmétique lorsqu'il existe un nombre réel r tel que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = r$.

Méthode : démontrer qu'une suite est arithmétique revient donc à démontrer que la différence $u_{n+1} - u_n$ entre deux termes consécutifs de la suite ne dépend pas de n .

Propriétés :

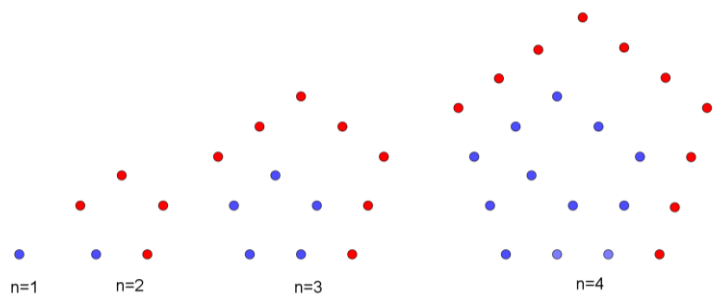
(1) Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r . Alors $u_n = u_1 + (n-1)r$.

(2) Soit (u_n) une suite arithmétique. Alors $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$.

Partant d'un point (étape 1), on construit successivement des pentagones réguliers en ajoutant un point sur la ligne du bas comme sur la figure ci-contre.

On note u_n le nombre de points (rouges ou bleus) obtenus à l'étape n .

1. Donner les valeurs de u_1, u_2, u_3, u_4 .
2. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , $u_{n+1} = u_n + 3n + 1$.
3. Déterminer la nature de la suite de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$.
4. En exprimant, pour $n \geq 1$ la somme $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}$ de deux manières différentes, en déduire une expression explicite de u_n en fonction de n .
5. Quel est le nombre pentagonal u_{2026} ?



Exercice 7 – Produit scalaire et orthogonalité

Définition 1 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de représentants respectifs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ($\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$).

On note p le réel $p = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$ si les points B et C sont distincts du point A et $p = 0$ sinon.

(On admet que p ne dépend pas des représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ choisis pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$).

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre p .

Définition 2 : On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de représentants respectifs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux lorsque soit l'un des vecteurs est le vecteur nul soit les droites (AB) et (AC) sont orthogonales.

(On admet que l'orthogonalité ne dépend pas des représentants choisis pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$).

Pour calculer un produit scalaire dans un problème de géométrie plane, il faut principalement avoir en tête les deux expressions :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$ si les points B et C sont distincts du point A ;

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$ où H est le projeté orthogonal de C sur (AB).

Propriété : si les points C et D ont le même projeté orthogonal sur la droite (AB), alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

Pour démontrer des orthogonalités, il est souvent utile de se référer :

- au théorème 1 : « $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ » ;
- à des décompositions de vecteurs grâce à la relation de Chasles ;
- aux propriétés opératoires du produit scalaire.

Dans cet exercice, les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. a. Soit MNP un triangle et I le milieu du segment [NP]. Démontrer que :

$$MN^2 + MP^2 = 2MI^2 + \frac{NP^2}{2} \text{ et } MN^2 - MP^2 = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{NP}.$$

On appelle ce résultat *théorème de la médiane*.

- b. Soit ABCD un quadrilatère, I le milieu de [AC] et J le milieu de [BD]. Montrer que :

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 4IJ^2 + AC^2 + BD^2$$

- c. En déduire que la somme des carrés des longueurs des côtés d'un quadrilatère est supérieure ou égale à la somme des carrés des longueurs des diagonales. Dans quel cas y a-t-il égalité ?
2. Soit ABCD un quadrilatère dont les diagonales [AC] et [BD] se coupent en O. On note respectivement H et K les orthocentres des triangles OAB et OCD.
- a. Justifier l'égalité $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HO}$. En déduire les égalités $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HK} = \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{BD}$.
- b. Soit I et J les milieux respectifs des segments [AD] et [BC]. Démontrer que $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{IJ}$.
- c. En déduire que les droites (HK) et (IJ) sont perpendiculaires.