ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Année 2023-2024 — **Stage « filé »**

Classe de première — **Fiche numéro 3**

Parution lundi 26 février — **Retour attendu pour le jeudi 14 mars**

Exercice 1 – Inégalités

Rappels sur les inégalités :

(1) Pour comparer deux nombres, on peut étudier le signe de leur différence.

(2) Pour comparer deux nombres positifs, on peut comparer leurs carrés.

a. Montrer que pour tout réel a strictement positif, $a+\frac{1}{a}\geq 2$.

b. Soit x, y et z trois nombres réels strictement positifs. Démontrer l'inégalité

$\sqrt{x+y+z}+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}>\pi$.

a. Pour tout réel a, $(a-1)^2\geq 0$ soit $a^2+1\geq 2a$ soit pour tout a strictement positif, $a+\frac{1}{a}\geq 2$.

b. Considérons le nombre $N=\left(\sqrt{x+y+z}+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}\right)^2$

$N=(x+y+z)+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+2\sqrt{(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}$

Soit $N=\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(y+\frac{1}{y}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right)+2\sqrt{1+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+1+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+1}$

Soit $N=\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(y+\frac{1}{y}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right)+2\sqrt{3+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)}$

On retrouve dans chaque parenthèse une expression $a+\frac{1}{a}$, où a est un réel strictement positif. Or $a+\frac{1}{a}\geq 2$.

On en tire $N\geq 2+2+2+2\sqrt{3+2+2+2}$ soit $N\geq 12$ d'où $\sqrt{N}\geq\sqrt{12}$.

Comme $\sqrt{N}=\sqrt{x+y+z}+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$ et $\sqrt{12}>\pi$, on a bien $\sqrt{x+y+z}+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}>\pi$.

Exercice 2 – Inégalité de Cauchy-Schwarz

Cet exercice s'appuie sur les propriétés relatives à l'étude du signe d'un trinôme du second degré.

L'objectif de cet exercice est de montrer que pour tous nombres réels a, b, c, d :

$$(ab+cd)^2\leq(a^2+c^2)(b^2+d^2).\quad (*)$$

Soit a, b, c, d quatre nombres réels et soit f la fonction qui à tout nombre réel x associe le nombre $f(x)=(a+bx)^2+(c+dx)^2$.

1. Dans quel cas $f(x)$ n'est pas un trinôme du second degré ? Dans ce cas, l'inégalité (*) est-elle vérifiée ?
2. Montrer que, sauf dans ce cas, $f(x)$ est un trinôme du second degré et exprimer son discriminant en fonction de a, b, c, d .
3. En déduire l'inégalité (*).

1. Pour tout réel x, $f(x)=a^2+2abx+b^2x^2+c^2+2cdx+d^2x^2=(b^2+d^2)x^2+(2ab+2cd)x+a^2+c^2$. $f(x)$ n'est pas un trinôme du second degré si et seulement si $b^2+d^2=0$, c'est-à-dire $b=d=0$. Dans ce cas, $f(x)=(2ab+2cd)x+a^2+c^2=a^2+c^2$ et l'inégalité (*) s'écrit $0\leq 0$ ce qui est vrai.
2. Si $b^2+d^2\neq 0$ alors $f(x)$ est un trinôme du second degré dont le discriminant est $\Delta=(2ab+2cd)^2-4(b^2+d^2)(a^2+c^2)=4\left((ab+cd)^2-(b^2+d^2)(a^2+c^2)\right)$.
3. L'expression $f(x)=(a+bx)^2+(c+dx)^2$ permet d'affirmer que pour tout réel x, $f(x)\geq 0$ (comme somme de deux carrés) donc $\Delta\leq 0$ c'est-à-dire $(ab+cd)^2-(b^2+d^2)(a^2+c^2)\leq 0$ soit (*).

Exercice 3 – Polynômes et divisibilité dans N

Dans la fiche 2, il a été démontré que pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel x,
$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$ (*)

Définition : soit a et b deux entiers, b est un diviseur de a si et seulement s'il existe un entier k tel que $a = bk$.
On dit aussi que a est un multiple de b.

1. Déduire de la factorisation rappelée que pour tout entier naturel non nul n, pour tout réel x et tout réel a, $x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1})$. (**)
2. En déduire, pour tout entier naturel non nul n, un diviseur de $13^n - 2^n$.
3. En déduire, pour tout entier naturel non nul n, un diviseur de $3^{2n} - 2^n$.

1. On sait que pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel x, $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$
   Si $a = 0$, alors l'égalité (**) s'écrit $x^n = x \times x^{n-1}$ et est donc vérifiée.
   Si $a \neq 0$, alors en remplaçant x par $\frac{x}{a}$ dans (*), on obtient
   $\left(\frac{x}{a}\right)^n - 1 = \left(\left(\frac{x}{a}\right) - 1\right)\left(\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} + \left(\frac{x}{a}\right)^{n-2} + \cdots + \left(\frac{x}{a}\right) + 1\right)$ soit, en multipliant les deux membres de l'égalité par a^n, $x^n - a^n = a\left(\left(\frac{x}{a}\right) - 1\right) \times a^{n-1}\left(\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} + \left(\frac{x}{a}\right)^{n-2} + \cdots + \left(\frac{x}{a}\right) + 1\right)$
   Soit, $x^n - a^n = (x-a)\,(x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1})$.
2. En posant $x = 13$ et $a = 2$, l'égalité (**) s'écrit
   $13^n - 2^n = (13-2)(13^{n-1} + 2 \times 13^{n-2} + \cdots + 2^{n-2} \times 13 + 2^{n-1})$. En posant $k = (13^{n-1} + 2 \times 13^{n-2} + \cdots + 2^{n-2} \times 13 + 2^{n-1})$, k est un entier et $13^n - 2^n = 11k$ donc $13^n - 2^n$ est un multiple de 11 c'est-à-dire 11 est un diviseur de $13^n - 2^n$.
3. On effectue le même raisonnement en posant $x = 9 = 3^2$ et $a = 2$ et on en déduit que $9 - 2 = 7$ est un diviseur de $9^n - 2^n = 3^{2n} - 2^n$.

Exercice 4 – Tangentes communes à deux courbes

Propriété 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère. Soit a un réel de l'intervalle I et A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a. Si f est dérivable en a, alors $\mathcal{C}_f$ admet au point A une tangente d'équation $y - f(a) = f'(a)(x-a)$.

Propriété 2 : Les points d'intersections des courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de deux fonctions f et g sont les points de ces courbes dont les abscisses sont solutions de $f(x) = g(x)$.

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on considère les courbes représentatives respectives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ des fonctions f et g définies sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 6$ et $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$.

1. Tracer les deux courbes dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
2. Déterminer si ces courbes ont un point commun.
3. Dans cette question, on cherche si les deux courbes admettent des tangentes communes.
   a. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A(a, f(a))$ et une équation de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point $B(b, g(b))$.
   b. En déduire le nombre de tangentes communes aux deux courbes et tracer, si elles existent, ces tangentes.

1. Voir les courbes sur la page suivante.
2. Les points d'intersections des courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de deux fonctions f et g sont les points de ces courbes dont les abscisses sont solutions de $f(x) = g(x)$.
   On cherche donc à résoudre l'équation $x^2 - 4x + 6 = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$ soit $\frac{3}{2}x^2 - 5x + \frac{11}{2} = 0$
   Soit $3x^2 - 10x + 11 = 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = 100 - 4 \times 3 \times 11 = -32$. $\Delta < 0$ donc l'équation n'a pas de solution, ce qui signifie que les deux courbes n'ont pas de points communs.
3. ***a.*** f et g sont deux fonctions polynômes dérivables sur $\mathbf{R}$ et pour tout réel x,
   $f'(x) = 2x - 4$ et $g'(x) = -x + 1$.
   Une équation de la tangente $\mathcal{T}_a$ à $\mathcal{C}_f$ au point $A(a, f(a))$ est $y - f(a) = f'(a)(x-a)$
   Soit $y = (2a-4)(x-a) + (a^2 - 4a + 6)$ soit $y = (2a-4)x + \big(-a(2a-4) + (a^2 - 4a + 6)\big)$ c'est-à-dire $y = (2a-4)x + (-a^2 + 6)$.

Une équation de la tangente $\mathcal{T}_b$ à $\mathcal{C}_g$ au point $B(b, f(b))$ est $y - f(b) = f'(b)(x - b)$.

Soit $y = (-b+1)(x-b) + \left(-\frac{1}{2}b^2 + b + \frac{1}{2}\right)$ soit $y = (-b+1)x + \left((-b)(-b+1) + \left(-\frac{1}{2}b^2 + b + \frac{1}{2}\right)\right)$

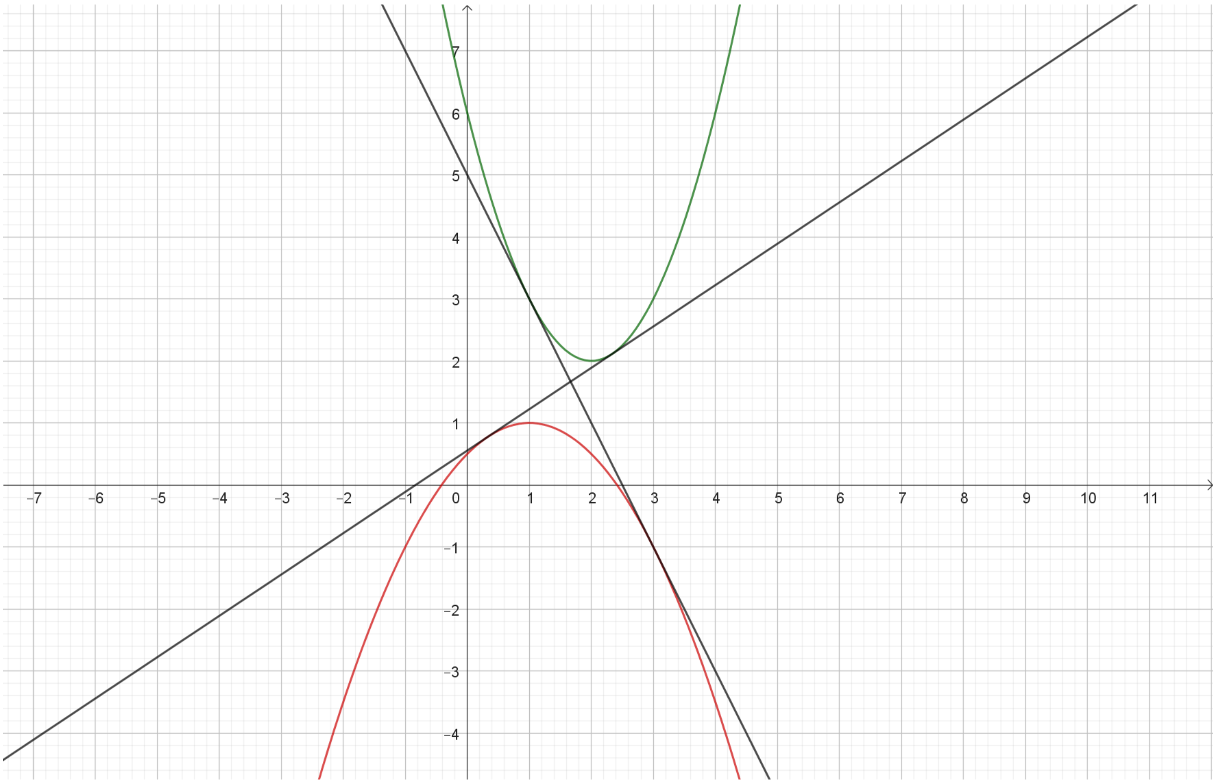
c'est-à-dire $y = (-b+1)x + \left(\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}\right)$.

b. Les tangentes $\mathcal{T}_a$ et $\mathcal{T}_b$ sont confondues si et seulement si le couple (a, b) est solutions du système $\begin{cases} 2a - 4 = -b + 1 \\ -a^2 + 6 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2} \end{cases}$ soit $\begin{cases} b = 5 - 2a \\ b^2 + 1 = -2a^2 + 12 \end{cases}$ soit $\begin{cases} b = 5 - 2a \\ (5-2a)^2 + 1 = -2a^2 + 12 \end{cases}$

Soit $\begin{cases} b = 5 - 2a \\ 4a^2 - 20a + 26 = -2a^2 + 12 \end{cases}$ soit $\begin{cases} b = 5 - 2a \\ 6a^2 - 20a + 14 = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} b = 5 - 2a \\ 3a^2 - 10a + 7 = 0 \end{cases}$

Le discriminant de l'équation du second degré est $\Delta = 100 - 4 \times 3 \times 7 = 16$ et ses solutions sont $a_1 = \frac{7}{3}$ et $a_2 = 1$. En reportant dans la première équation, on obtient $b_1 = \frac{1}{3}$ et $b_2 = 3$.

On en déduit que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont deux tangentes communes qui ont pour équations $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{9}$ et $y = -2x + 5$.



Exercice 5 – Suites imbriquées.

Définition : Soit q un nombre réel non nul. On appelle suite géométrique de raison q, toute suite vérifiant $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = qu_n$.

Propriété : soit (u_n) une suite géométrique de raison q alors $\forall n \in \mathbf{N}, u_n = u_0 q^n$.

Soient les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}v_n \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + v_n \end{cases}$.

1. Calculer u_1, v_1 puis u_2, v_2.
2. On définit la suite de terme général $a_n = u_n + v_n$.
   a. Démontrer que la suite (a_n) est une suite géométrique.
   b. Exprimer le terme général a_n en fonction de l'entier n.
3. On définit la suite de terme général $b_n = u_n - v_n$.
   a. Démontrer que la suite (b_n) est une suite géométrique.
   b. Exprimer le terme général b_n en fonction de l'entier n.
4. En déduire une expression de u_n et de v_n en fonction de l'entier n.
5. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont telles que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - \frac{3}{4}u_n \text{ et } v_{n+2} = 2v_{n+1} - \frac{3}{4}v_n \ .$$

6. On s'intéresse aux suites (w_n) vérifiant la relation de récurrence R : $\forall n \in \mathbf{N}, w_{n+2} = 2w_{n+1} - \frac{3}{4}w_n$.

On admettra que w_0 et w_1 étant donnés, la suite (w_n) est définie de façon unique.

a. Soit q un nombre réel non nul. Démontrer que la suite (q^n) vérifie la relation R si et seulement si q est une solution dans $\mathbf{R}$ de l'équation E du second degré $x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0$.

b. Résoudre l'équation E.

c. Soit a et b des nombres réels quelconques et soit q_1 et q_2 les solutions de l'équation E. Montrer que toute suite de terme général $w_n = a{q_1}^n + b{q_2}^n$ vérifie la relation R.

d. Montrer que w_0 et w_1 étant donnés, il existe un unique couple (a, b) de nombres réels tel que

$$w_n = a{q_1}^n + b{q_2}^n$$

e. En déduire l'ensemble des suites (w_n) vérifiant la relation R.

1. On trouve $u_1 = 2$; $v_1 = 2{,}5$; $u_2 = 3{,}25$; $v_2 = 3{,}5$.

2. ***a.*** $\forall n \in \mathbf{N}, a_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{3}{2}(u_n + v_n) = \frac{3}{2}a_n$; la suite (a_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{2}$.

b. $\forall n \in \mathbf{N}, a_n = 3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$

3. ***a.*** $\forall n \in \mathbf{N},\ b_n = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n - v_n) = \frac{1}{2}b_n$; La suite (b_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b. $\forall n \in \mathbf{N}, b_n = (-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

4. On dispose des deux égalités : $\begin{cases} u_n + v_n = 3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n \\ u_n - v_n = (-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{cases}$

En additionnant les deux égalités $2u_n = 3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et en les soustrayant $2v_n = 3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Donc $\begin{cases} u_n = \frac{1}{2}\left(3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \\ v_n = \frac{1}{2}\left(3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \end{cases}$

5. $\forall n \in \mathbf{N}, 2u_{n+1} - \frac{3}{4}u_n = 3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{3}{8}\left(3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

$\forall n \in \mathbf{N}, 2u_{n+1} - \frac{3}{4}u_n = 3 \times \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{8}\right) \times \left(\frac{3}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\forall n \in \mathbf{N}, 2u_{n+1} - \frac{3}{4}u_n = 3 \times \frac{9}{8} \times \left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{1}{8} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\forall n \in \mathbf{N}, 2u_{n+1} - \frac{3}{4}u_n = \frac{1}{2} \times 3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\forall n \in \mathbf{N}, 2u_{n+1} - \frac{3}{4}u_n = \frac{1}{2} \times 3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n+2} - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} = \frac{1}{2}\left(3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right) = u_{n+2}$

Un calcul analogue avec un changement de signe prouverait la même relation pour la suite (v_n).

6. ***a.*** Soit q un nombre réel non nul et A la proposition : « la suite (q^n) vérifie la relation R ».

$A \Leftrightarrow \ \forall n \in \mathbf{N}, q^{n+2} = 2q^{n+1} - \frac{3}{4}q^n$

$A \Leftrightarrow \ \forall n \in \mathbf{N}, q^{n+2} - 2q^{n+1} + \frac{3}{4}q^n = 0$

$A \Leftrightarrow \ \forall n \in \mathbf{N}, q^n\left(q^2 - 2q + \frac{3}{4}\right) = 0$ et puisque $q \neq 0$, $A \Leftrightarrow q^2 - 2q + \frac{3}{4} = 0$

b. La résolution de l'équation E conduit à deux solutions réelles : $q_1 = \frac{3}{2}$; $q_2 = \frac{1}{2}$

c. $\forall n \in \mathbf{N}, w_{n+2} = a{q_1}^{n+2} + b{q_2}^{n+2} = a{q_1}^{n}{q_1}^{2} + b{q_2}^{n}{q_2}^{2}$; or q_1 et q_2 sont les solutions de l'équation E donc $q_1^2 = 2q_1 - \frac{3}{4}$ et $q_2^2 = 2q_2 - \frac{3}{4}$.

Donc $\forall n \in \mathbf{N}, w_{n+2} = a{q_1}^{n}\left(2q_1 - \frac{3}{4}\right) + b{q_2}^{n}\left(2q_2 - \frac{3}{4}\right) = 2\left(a{q_1}^{n+1} + b{q_2}^{n+1}\right) - \frac{3}{4}\left(a{q_1}^{n} + b{q_2}^{n}\right)$

Finalement $\forall n \in \mathbf{N}, w_{n+2} = 2w_{n+1} - \frac{3}{4}w_n$ ce qui prouve que la suite (w_n) vérifie la relation R.

d. On cherche s'il existe un couple (a, b) de nombres réels vérifiant : $\begin{cases} w_0 = a{q_1}^{0} + b{q_2}^{0} \\ w_1 = a{q_1}^{1} + b{q_2}^{1} \end{cases}$

soit le système $\begin{cases} a + b = w_0 \\ \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}b = w_1 \end{cases}$ qui équivaut successivement à : $\begin{cases} b = w_0 - a \\ \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}(w_0 - a) = w_1 \end{cases}$

$\begin{cases} b = w_0 - \left(w_1 - \frac{1}{2}w_0\right) \\ a = w_1 - \frac{1}{2}w_0 \end{cases}$ $\begin{cases} b = \frac{3}{2}w_0 - w_1 \\ a = w_1 - \frac{1}{2}w_0 \end{cases}$

La suite de terme général $w_n = \left(w_1 - \frac{1}{2}w_0\right) \times \left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{2}w_0 - w_1\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ répond au problème.

e. Soit une suite (w_n) vérifiant la relation R ; w_0 et w_1 étant donnés, la suite de terme général $w_n = \left(w_1 - \frac{1}{2}w_0\right) \times \left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{2}w_0 - w_1\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ vérifie la relation R (question **6. *d.***) et par unicité (admise en préambule), cette suite est l'unique suite répondant à la question.

Par ailleurs, toute suite de terme général $w_n = a{q_1}^{n} + b{q_2}^{n}$, avec a et b réels, vérifie la relation R (question **6. *c.***).

On en déduit que l'ensemble des suites vérifiant la relation R est l'ensemble des suite (w_n) pour lesquelles il existe un couple (a, b) de nombres réels tel que $\forall n \in \mathbf{N}, w_n = a\left(\frac{3}{2}\right)^n + b\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Exercice 6 – Produit scalaire et orthogonalité

Définition 1 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de représentants respectifs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ($\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$).
On note p le réel $p = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$ si les points B et C sont distincts du point A et $p = 0$ sinon.
(On admet que p ne dépend pas des représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ choisis pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$).
On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre p.

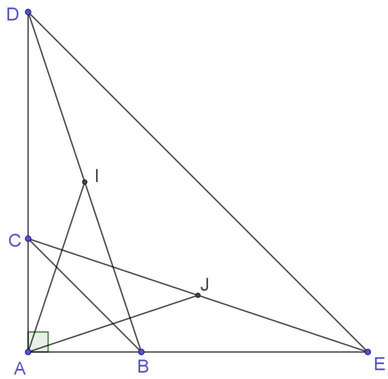
Définition 2 : On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de représentants respectifs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux lorsque soit l'un des vecteurs est le vecteur nul soit les droites (AB) et (AC) sont orthogonales.
(On admet que l'orthogonalité ne dépend pas des représentants choisis pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$).

Pour calculer un produit scalaire dans un problème de géométrie plane, il faut principalement avoir en tête les deux expressions :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$ si les points B et C sont distincts du point A ;
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ où H est le projeté orthogonal de C sur (AB).

Pour démontrer des orthogonalités, il est souvent utile de se référer :
- au théorème 1 : « $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$ » ;
- à des décompositions de vecteurs grâce à la relation de Chasles ;
- aux propriétés opératoires du produit scalaire.

Soit ABC un triangle isocèle rectangle en A. On considère des points D et E tels que :
- D appartient à la demi-droite [AC) mais pas au segment [AC] ;
- E appartient à la demi-droite [AB) mais pas au segment [AB] ;
- BE = CD.

On note I et J les milieux respectifs des segments [BD] et [CE].
1. Montrer que les droites (AI) et (CE) sont perpendiculaires.
2. Montrer que les droites (AJ) et (BD) sont perpendiculaires.



1. Le point I est le milieu du segment [BD] donc $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$ donc $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}).(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE})$

$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE})$

Or ABC étant rectangle en A, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} = 0$. De plus, E appartient à (AB) et D appartient à (AC) donc $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE} = 0$.

E appartient à la demi-droite [AB) mais pas au segment [AB] donc

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} = AB \times AE$

D appartient à la demi-droite [AC) mais pas au segment [AC] donc

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CA} = -AD \times CA$

D'autre part, le triangle ABC est isocèle en A donc AB = AC et AE = AB + BE= AC + CD = AD.

Donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CA} = AB \times AE - AE \times AB = 0$

Conclusion $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CE} = 0$ d'où les droites (AI) et (CE) sont perpendiculaires.

2. On procède de la même façon en calculant le produit scalaire

$\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}).(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AD})$

Or $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA} = 0$, $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AD} = 0$ et $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BA} = AC \times AD - AE \times AB = AB \times AE - AE \times AB = 0$

On en déduit que $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BD} = 0$ et donc (AJ) et (BD) sont perpendiculaires.

Exercice 7 – Puissance d'un point par rapport à un cercle

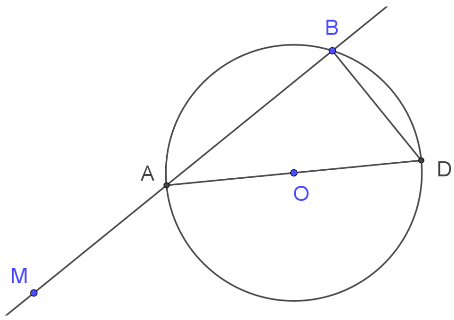
Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon R. On appelle *puissance du point* M *par rapport au cercle* $\mathcal{C}$ le nombre $p(M) = MO^2 - R^2$

a. Montrer que si on considère un point M et une droite du plan passant par M tels que la droite d coupe le cercle $\mathcal{C}$ en deux points A et B, alors $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = p(M)$.
(on pourra introduire le point D diamétralement opposé au point A sur le cercle $\mathcal{C}$).

b. Montrer que si une droite d passant par M est tangente au cercle $\mathcal{C}$ en T alors $MT^2 = p(M)$.

c. Etudier le signe de $p(M)$ suivant la position du point M par rapport au cercle $\mathcal{C}$.

d. Soit $\mathcal{C}'$ un cercle de centre O' et de rayon R'. On suppose que les deux cercles ont des centres distincts. Déterminer l'ensemble des points M du plan ayant même puissance par rapport aux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Traiter le cas particulier où les deux cercles ont même rayon.



a. Soit D le point diamétralement opposé à A sur le cercle $\mathcal{C}$.

Le triangle ABD est alors rectangle en B

donc $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$

Or $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MD} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA})$

Soit $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = MO^2 - OA^2 = MO^2 - R^2$

D'où $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MO^2 - R^2 = p(M)$.

b. Si T est le point où la droite D est tangente, alors

$\overrightarrow{MO}^2 = (\overrightarrow{MT} + \overrightarrow{TO})^2 = \overrightarrow{MT}^2 + 2\overrightarrow{MT}.\overrightarrow{TO} + \overrightarrow{TO}^2$

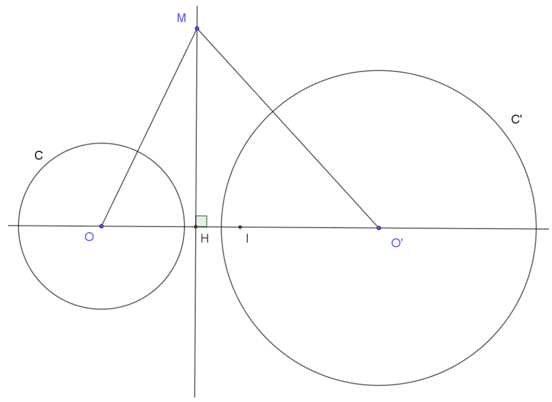
Soit $MO^2 = MT^2 + R^2$ car, par définition du point T, $\overrightarrow{MT}.\overrightarrow{TO} = 0$.

On a donc bien $MT^2 = MO^2 - R^2 = p(M)$.

c. Comme $p(M) = MO^2 - R^2$ le signe de $p(M)$ est déterminé par la distance de M à O :

- Si $MO < R$ c'est-à-dire M est à l'intérieur du cercle $\mathcal{C}$, alors $p(M) < 0$;
- Si $MO = R$ c'est-à-dire M appartient au cercle $\mathcal{C}$, alors $p(M) = 0$;
- Si $MO > R$ c'est-à-dire M est à l'extérieur du cercle $\mathcal{C}$, alors $p(M) > 0$.

d. Soit $p'(\mathrm{M})$ la puissance d'un point M par rapport au cercle $\mathcal{C}'$.
Alors $p'(\mathrm{M}) = \mathrm{MO}'^2 - R'^2$ et $p(\mathrm{M}) = p'(M)$ équivaut à
$\mathrm{MO}^2 - R^2 = \mathrm{MO}'^2 - R'^2$ soit $\mathrm{MO}^2 - \mathrm{MO}'^2 = R^2 - R'^2$.



Or $\mathrm{MO}^2 - \mathrm{MO}'^2 = \overrightarrow{\mathrm{MO}}^2 - \overrightarrow{\mathrm{MO}'}^2 = \left(\overrightarrow{\mathrm{MO}} + \overrightarrow{\mathrm{MO}'}\right).\left(\overrightarrow{\mathrm{MO}} - \overrightarrow{\mathrm{MO}'}\right)$
Soit $\mathrm{MO}^2 - \mathrm{MO}'^2 = 2\overrightarrow{\mathrm{MI}}.\overrightarrow{\mathrm{O'O}}$ si on note I le milieu de $[\mathrm{OO}']$.
Soit H le projeté orthogonal de M sur la droite (OO'), on a donc
$\mathrm{MO}^2 - \mathrm{MO}'^2 = 2\overrightarrow{\mathrm{HI}}.\overrightarrow{\mathrm{O'O}} = 2\overrightarrow{\mathrm{IH}}.\overrightarrow{\mathrm{OO}'}$.
Un point M a donc même puissance par rapport aux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ si et seulement si son projeté orthogonal H sur la droite (OO') vérifie
$2\overrightarrow{\mathrm{IH}}.\overrightarrow{\mathrm{OO}'} = R^2 - R'^2$
En particulier, si les deux cercles ont même rayon, l'ensemble des points ayant même puissance par rapport aux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ est la médiatrice du segment $[\mathrm{OO}']$.

Exercice 8 – Orthocentre et hyperbole

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, si A , B et C sont trois points du plan tels que $A \neq B$:

- un point $M(x, y)$ appartient à la droite (AB) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires ;
- un point $M(x, y)$ appartient à la droite passant par C et perpendiculaire à la droite (AB) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.

C'est en traduisant sur les coordonnées (déterminant ou produit scalaire nul) qu'on obtient une équation de chacune de ces droites.

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $y = \frac{1}{x}$ et trois points deux à deux distincts A, B et C d'abscisses respectives a, b et c (non nulles) de cette hyperbole.

a. Déterminer une équation cartésienne de la hauteur d_A issue du point A dans le triangle ABC.
b. En déduire une équation de la hauteur d_B issue du point B dans le triangle ABC.
c. Montrer que l'orthocentre H du triangle ABC appartient à l'hyperbole $\mathcal{H}$.

a. Les points A, B et C d'abscisses respectives a, b et c sont des points de l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $y = \frac{1}{x}$. On a donc $A\left(a, \frac{1}{a}\right), B\left(b, \frac{1}{b}\right), C\left(c, \frac{1}{c}\right)$.
Un point $M(x, y)$ appartient à la hauteur d_A issue du point A dans le triangle ABC si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-a \\ y-\frac{1}{a} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} c-b \\ \frac{1}{c}-\frac{1}{b} \end{pmatrix}$ sont orthogonaux soit $(x-a)(c-b) + \left(y-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right) = 0$ c'est-à-dire
$bc(x-a)(c-b) + \left(y-\frac{1}{a}\right)(b-c) = 0$ soit, puisque les points B, C sont distincts et donc $b \neq c$,
$bc(x-a) + \left(\frac{1}{a}-y\right) = 0$. L'équation réduite de d_A est donc $y = bcx + \frac{1}{a} - abc$.
b. En permutant les rôles de A, B et C, a devient b, b devient c et c devient a et l'équation réduite de la hauteur d_B issue du point B dans le triangle ABC est $y = cax + \frac{1}{b} - bca$.
c. Les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC sont les solutions du système $\begin{cases} y = bcx + \frac{1}{a} - abc \\ y = cax + \frac{1}{b} - bca \end{cases}$ qui équivaut au système $\begin{cases} (bc-ca)x + \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 0 \\ y = bcx + \frac{1}{a} - abc \end{cases}$.
La première équation s'écrit $c(b-a)x = \frac{a-b}{ab}$ soit, puisque A, B sont distincts et donc $a \neq b$, $x = -\frac{1}{abc}$.
L'ordonnée du point H est alors $y = bc\left(-\frac{1}{abc}\right) + \frac{1}{a} - abc = -\frac{1}{a} + \frac{1}{a} - abc = -abc$.
On constate que l'ordonnée de H est l'inverse de son abscisse, ce qui signifie que H est bien un point de l'hyperbole $\mathcal{H}$.