ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Année 2022-2023 **Stage « filé »**

Classe de première **Fiche numéro 3**

Parution lundi 16 janvier **Retour attendu pour le jeudi 2 février**

Exercice 1 Inégalités et calcul littéral

Définition : on dit qu'un nombre a est inférieur ou égal à un nombre b lorsque $b-a\geq 0$.
Cette définition conduit à une méthode pratique pour comparer deux nombres.
Propriétés :
(1) Pour tous réels a et b strictement positifs, si $a\leq b$, alors $\frac{1}{a}\geq\frac{1}{b}$.
(2) Pour tous réels a et b positifs, $a\leq b$ si et seulement si $a^2\leq b^2$.

1. a. Démontrer que, pour tous réels x, y strictement positifs, $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$. .

   b. Soit x, y, z des réels strictement positifs, calculer le produit $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$.

   c. En déduire que si x, y, z des réels strictement positifs tels que $x+y+z\leq 3$, alors $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 3$.
2. a. Montrer que pour tous réels a, b, c, $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)=\frac{1}{2}((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)$

   b. Soit a, b, c trois réels strictement positifs tels que $ab+bc+ca=1$.
   Montrer que $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\sqrt{3}+\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}$.

1. a. $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2=\frac{x^2+y^2-2xy}{xy}=\frac{(x-y)^2}{xy}$. Comme x et y sont strictement positifs, $xy>0$. De plus $(x-y)^2\geq 0$.
   On a donc bien $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$.

   b. $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+1+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+1=3+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)$.

   c. Le résultat du a. permet d'écrire $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$, $\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\geq 2$ et $\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\geq 2$ d'où $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9$.
   On en tire $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 9\times\frac{1}{x+y+z}$ (puisque $x+y+z>0$).
   Or, d'après la propriété (1), comme $0<x+y+z\leq 3$, $\frac{1}{x+y+z}\geq\frac{1}{3}$ d'où $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 3$.
2. a. Pour tous réels a, b, c,
   $\frac{1}{2}((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)=\frac{1}{2}(a^2+b^2-2ab+b^2+c^2-2bc+c^2+a^2-2ca)$
   Soit $\frac{1}{2}((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)=a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)$.

   b. Pour tous réels a, b, c strictement positifs, $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}-\left(\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}\right)=\frac{1-ab}{a+b}+\frac{1-bc}{b+c}+\frac{1-ca}{c+a}$.
   Or $ab+bc+ca=1$ donc $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}-\left(\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}\right)=\frac{bc+ca}{a+b}+\frac{ca+ab}{b+c}+\frac{ab+bc}{c+a}$
   Soit $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}-\left(\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}\right)=c+a+b$.
   De plus comme a, b, c sont strictement positifs, comparer $a+b+c$ à $\sqrt{3}$ revient à comparer leurs carrés.
   $(a+b+c)^2-3=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca-3=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca-3$
   Soit $(a+b+c)^2-3=a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca+3(ab+bc+ca)-3$
   Soit $(a+b+c)^2-3=a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca$ car $ab+bc+ca=1$
   Soit $(a+b+c)^2-3=\frac{1}{2}((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)$ qui est un nombre positif ou nul.
   On a donc $(a+b+c)^2\geq 3$ et $a+b+c>0$ d'où $a+b+c\geq\sqrt{3}$ c'est-à-dire $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}-\left(\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}\right)\geq\sqrt{3}$ ce qui s'écrit aussi $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\sqrt{3}+\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}$.

Exercice 2 Inégalité et fonction convexe

Soit f et g deux fonctions définies sur un même ensemble E et dont les courbes représentatives dans le plan muni d'un repère sont $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Étudier les positions relatives des deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ revient à étudier le signe de $f(x) - g(x)$ sur l'ensemble E.

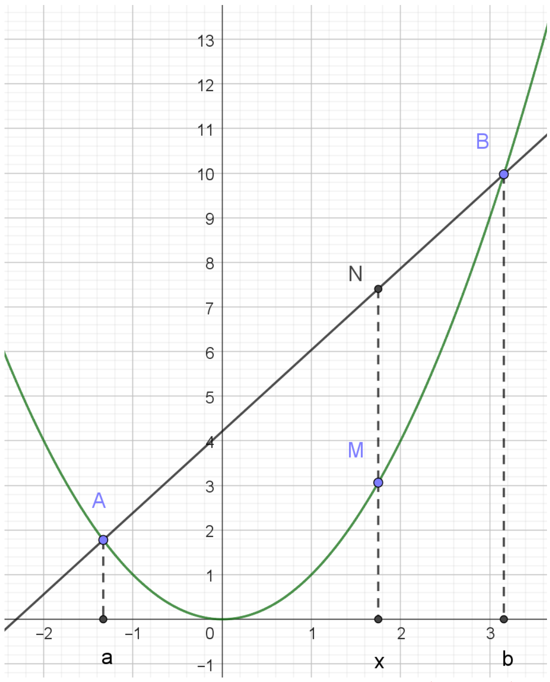
Soit f la fonction carrée et $\mathcal{P}$ sa représentation graphique dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan.

1. Montrer que si A et B sont deux points de $\mathcal{P}$ d'abscisses respectives a et b telles que $a < b$, alors la droite (AB) se situe au-dessus de $\mathcal{P}$ sur l'intervalle $[a, b]$.

On dit alors que la fonction carrée est une fonction *convexe*.

2. a. Justifier qu'un point $\mathrm{N}(x, y)$ du plan appartient au segment [AB] si et seulement si il existe un réel t tel que $t \in [0,1]$ et $\overrightarrow{\mathrm{NB}} = \mathrm{t}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. En déduire l'expression de x et y en fonction de a, b et t.
   b. Montrer que la position relative du segment [AB] et de la parabole $\mathcal{P}$ sur l'intervalle $[a, b]$ se traduit par :
   $$\text{pour tout réel } t \in [0,1], f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b).$$
   c. Quelle inégalité vue dans la fiche 2 retrouve-t-on dans le cas où $t = \frac{1}{2}$?

1. Soit g la fonction affine représentée par la droite (AB). Il s'agit de déterminer une expression de $g(x)$ et de montrer que pour tout réel $x \in [a, b]$, $f(x) - g(x) \leq 0$.
   On a $\mathrm{A}(a, a^2)$ et $\mathrm{B}(b, b^2)$.
   Un point $M(x, y)$ appartient à la droite (AB) si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\begin{pmatrix} x-a \\ y-a^2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} b-a \\ b^2-a^2 \end{pmatrix}$ sont colinéaires,
   c'est-à-dire $(x-a)(b^2-a^2) - (y-a^2)(b-a) = 0$
   soit, en factorisant et en simplifiant par $(b-a)$ puisque $a \neq b$, $y = a^2 + (a+b)(x-a)$
   soit $y = (a+b)x - ab$.
   Alors $f(x) - g(x) = x^2 - (a+b)x + ab$.
   Le discriminant associé à ce polynôme du second degré est $\Delta = (a+b)^2 - 4ab = a^2 + b^2 + 2ab - 4ab$
   Soit $\Delta = (a-b)^2$.
   On sait déjà que a et b sont les deux racines de ce trinôme. Comme le coefficient de x^2 est 1, on en déduit que, sur l'intervalle $[a, b]$, $f(x) - g(x) \leq 0$ c'est-à-dire la droite (AB) se situe au-dessus de $\mathcal{P}$.



2. a. Un point $\mathrm{N}(x_N, y_N)$ du plan appartient au segment [AB] si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{NB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ sont colinéaires de même sens et $\mathrm{NB} \leq \mathrm{AB}$, ce qui justifie l'existence de t et le fait que $t \in [0,1]$.
   b. La position relative du segment [AB] et de la parabole $\mathcal{P}$ sur l'intervalle $[a, b]$ se traduit par l'ordonnée du point N devant être supérieure ou égale à celle du point M. Ces deux points ont même abscisse x et il existe un réel $t \in [0,1]$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{NB}} = \mathrm{t}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ soit $\begin{cases} b - x_N = t(b-a) \\ b^2 - y_N = t(b^2 - a^2) \end{cases}$ soit $\begin{cases} x_N = ta + (1-t)b \\ y_N = ta^2 + (1-t)b^2 \end{cases}$.
   L'inégalité $y_M \leq y_N$ s'écrit donc $f(ta + (1-t)b) \leq ta^2 + (1-t)b^2$
   soit $f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$.
   c. $t = \frac{1}{2}$ signifie que N est le milieu de [AB]. L'inégalité précédente s'écrit alors $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b)$
   soit $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$.

Exercice 3 Produit scalaire et orthogonalité

Définition 1 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de représentants respectifs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ($\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$).

On note p le réel $p = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$ si les points B et C sont distincts du point A et $p = 0$ sinon.

(On admet que p ne dépend pas des représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ choisis pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$).

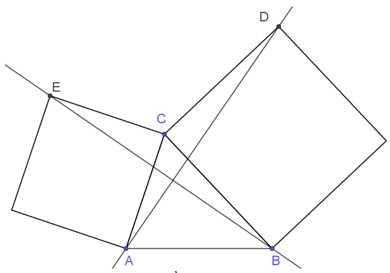
On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre p.

Définition 2 : On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de représentants respectifs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux lorsque soit l'un des vecteurs est le vecteur nul soit les droites (AB) et (AC) sont orthogonales.
(On admet que l'orthogonalité ne dépend pas des représentants choisis pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$).

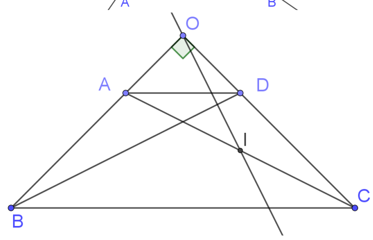
Pour calculer un produit scalaire dans un problème de géométrie plane, il faut principalement avoir en tête les deux expressions :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$ si les points B et C sont distincts du point A ;
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ où H est le projeté orthogonal de C sur (AB).

Pour démontrer des orthogonalités, il est souvent utile de se référer :
- au théorème 1 : « $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$ » ;
- à des décompositions de vecteurs grâce à la relation de Chasles ;
- aux propriétés opératoires du produit scalaire.

1. Démonstration du théorème 1 :
   a. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs orthogonaux, montrer que $\vec{u}.\vec{v} = 0$ (on distinguera le cas où l'un au moins des vecteurs est nul).
   b. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\vec{u}.\vec{v} = 0$.
   Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tous les deux non nuls, montrer qu'ils sont orthogonaux.
   Que se passe-t-il si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est le vecteur nul ?
2. Application 1 : soit ABC un triangle.
A l'extérieur de ce triangle on construit deux carrés comme sur la figure ci-contre.
   a. Montrer que $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CE}$.
   b. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{EB}$ sont orthogonaux.
   c. Que peut-on en déduire pour les droites (AD) et (EB) ?



3. Application 2 : soit ABCD un trapèze isocèle dont les côtés non parallèles sont perpendiculaires en un point O, comme sur la figure ci-contre et soit I le milieu de [AC].
   a. Exprimer $\overrightarrow{OI}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OC}$.
   b. En déduire que $2\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD}$.
   c. Démontrer que les droites (OI) et (BD) sont perpendiculaires.



1. a. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs orthogonaux. Par définition ou caractérisation du produit scalaire (projection orthogonale ou formule avec le cosinus) :
   - si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est le vecteur nul, alors on a bien $\vec{u}.\vec{v} = 0$
   - si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tous les deux non nuls, alors $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 0$ donc $\vec{u}.\vec{v} = 0$
   b. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que $\vec{u}.\vec{v} = 0$.
   Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tous les deux non nuls, alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$ s'écrit $\|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|\ \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 0$ d'où, puisque $\|\vec{u}\| \neq 0$ et $\|\vec{v}\| \neq 0$, $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 0$ ce qui signifie que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
   Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est le vecteur nul, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont aussi orthogonaux.
2. Application 1 :
   a. $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = CA \times CB \times \cos \widehat{ACB}$ et $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CE} = CE \times CD \times \cos \widehat{ECD}$.
   Or $CA = CE$ et $CB = CD$ puisqu'on a des carrés et $\widehat{ECD} = 360° - (90° + \widehat{ACB} + 90°) = 180° - \widehat{ACB}$
   donc $\cos \widehat{ECD} = -\cos \widehat{ACB}$. On en déduit que $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CE}$.
   b. $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{EB} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}).(\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}$
   Soit $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{EB} = 0 - \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CE} + 0$ (puisqu'on a des carrés donc des angles droits).
   D'après le a ., on en déduit que $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{EB} = -\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 0$.
   c. $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{EB} = 0$. Les droites (AD) et (EB) sont donc perpendiculaires.
3. Application 2 :

a. I étant le milieu de [AC], on a $\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}})$.

b. $2\overrightarrow{\mathrm{OI}}.\overrightarrow{\mathrm{BD}} = (\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}).(\overrightarrow{\mathrm{BO}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}}) = \overrightarrow{\mathrm{OA}}.\overrightarrow{\mathrm{BO}} + \overrightarrow{\mathrm{OA}}.\overrightarrow{\mathrm{OD}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}.\overrightarrow{\mathrm{BO}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}.\overrightarrow{\mathrm{OD}}$

Or (OA) et (OD) sont perpendiculaires donc $\overrightarrow{\mathrm{OA}}.\overrightarrow{\mathrm{OD}} = 0$ et $\overrightarrow{\mathrm{OC}}.\overrightarrow{\mathrm{BO}} = 0$.

On a donc $2\overrightarrow{\mathrm{OI}}.\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}.\overrightarrow{\mathrm{BO}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}.\overrightarrow{\mathrm{OD}} = -\mathrm{OA} \times \mathrm{OB} \times \cos\widehat{\mathrm{AOB}} + \mathrm{OC} \times \mathrm{OD} \times \cos\widehat{\mathrm{COD}}$

Soit $2\overrightarrow{\mathrm{OI}}.\overrightarrow{\mathrm{BD}} = -\mathrm{OA} \times \mathrm{OB} + \mathrm{OC} \times \mathrm{OD} = 0$ car le trapèze étant isocèle, la médiatrice de [BC] est un axe de symétrie d'où $\mathrm{OA} = \mathrm{OD}$ et $\mathrm{OB} = \mathrm{OC}$.

c. Comme $2\overrightarrow{\mathrm{OI}}.\overrightarrow{\mathrm{BD}} = 0$, les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ sont orthogonaux d'où les droites (OI) et (BD) sont perpendiculaires.

Exercice 4 Puissance d'un point par rapport à un cercle

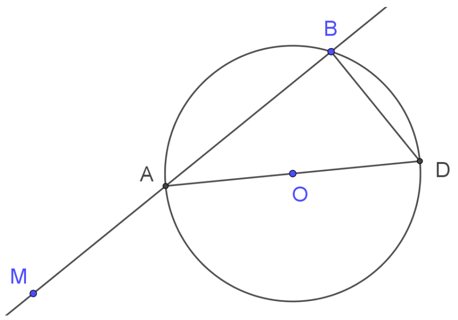
Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon R. On appelle *puissance du point M par rapport au cercle* $\mathcal{C}$ le nombre $\mathrm{p(M)} = \mathrm{MO}^2 - \mathrm{R}^2$

a. Montrer que si on considère un point M et une droite du plan passant par M tels que la droite d coupe le cercle $\mathcal{C}$ en deux points A et B, alors $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}} = \mathrm{p(M)}$.
(on pourra introduire le point D diamétralement opposé au point A sur le cercle $\mathcal{C}$).

b. Montrer que si une droite d passant par M est tangente au cercle $\mathcal{C}$ en T alors $\mathrm{MT}^2 = p(\mathrm{M})$.

c. Etudier le signe de $p(\mathrm{M})$ suivant la position du point M par rapport au cercle $\mathcal{C}$.

d. Soit $\mathcal{C}'$ un cercle de centre O' et de rayon R'. On suppose que les deux cercles ont des centres distincts. Déterminer l'ensemble des points M du plan ayant même puissance par rapport aux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Traiter le cas particulier où les deux cercles ont même rayon.

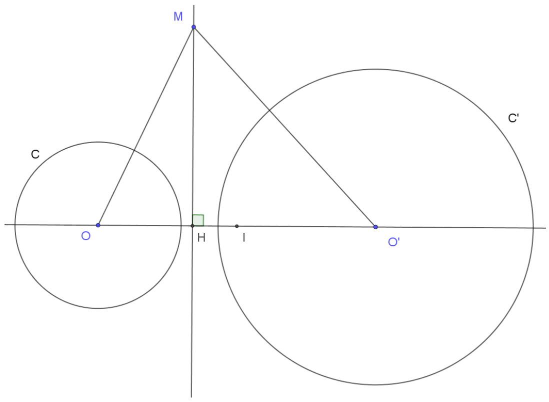


a. Soit D le point diamétralement opposé à A sur le cercle $\mathcal{C}$.
Le triangle ABD est alors rectangle en B
donc $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MD}} = \overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}}$
Or $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MD}} = (\overrightarrow{\mathrm{MO}} + \overrightarrow{\mathrm{OA}}).(\overrightarrow{\mathrm{MO}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}}) = (\overrightarrow{\mathrm{MO}} + \overrightarrow{\mathrm{OA}}).(\overrightarrow{\mathrm{MO}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}})$
Soit $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MD}} = \overrightarrow{\mathrm{MO}}^2 - \overrightarrow{\mathrm{OA}}^2 = \mathrm{MO}^2 - \mathrm{OA}^2 = \mathrm{MO}^2 - R^2$
D'où $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}} = \mathrm{MO}^2 - R^2 = \mathrm{p(M)}$.

b. Si T est le point où la droite D est tangente, alors
$\overrightarrow{\mathrm{MO}}^2 = (\overrightarrow{\mathrm{MT}} + \overrightarrow{\mathrm{TO}})^2 = \overrightarrow{\mathrm{MT}}^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{MT}}.\overrightarrow{\mathrm{TO}} + \overrightarrow{\mathrm{TO}}^2$
Soit $\mathrm{MO}^2 = \mathrm{MT}^2 + R^2$ car, par définition du point T, $\overrightarrow{\mathrm{MT}}.\overrightarrow{\mathrm{TO}} = 0$.
On a donc bien $\mathrm{MT}^2 = \mathrm{MO}^2 - R^2 = p(\mathrm{M})$.

c. Comme $p(\mathrm{M}) = \mathrm{MO}^2 - R^2$ le signe de $p(\mathrm{M})$ est déterminé par la distance de M à O :
- Si $\mathrm{MO} < R$ c'est-à-dire M est à l'intérieur du cercle $\mathcal{C}$, alors $p(\mathrm{M}) < 0$;
- Si $\mathrm{MO} = R$ c'est-à-dire M appartient au cercle $\mathcal{C}$, alors $p(\mathrm{M}) = 0$;
- Si $\mathrm{MO} > R$ c'est-à-dire M est à l'extérieur du cercle $\mathcal{C}$, alors $p(\mathrm{M}) > 0$.

d. Soit $p'(\mathrm{M})$ la puissance d'un point M par rapport au cercle $\mathcal{C}'$.
Alors $p'(\mathrm{M}) = \mathrm{MO}'^2 - R'^2$ et $p(\mathrm{M}) = p'(M)$ équivaut à
$\mathrm{MO}^2 - R^2 = \mathrm{MO}'^2 - R'^2$ soit $\mathrm{MO}^2 - \mathrm{MO}'^2 = R^2 - R'^2$.



Or $\mathrm{MO}^2 - \mathrm{MO}'^2 = \overrightarrow{\mathrm{MO}}^2 - \overrightarrow{\mathrm{MO}'}^2 = (\overrightarrow{\mathrm{MO}} + \overrightarrow{\mathrm{MO}'}).(\overrightarrow{\mathrm{MO}} - \overrightarrow{\mathrm{MO}'})$
Soit $\mathrm{MO}^2 - \mathrm{MO}'^2 = 2\overrightarrow{\mathrm{MI}}.\overrightarrow{\mathrm{O'O}}$ si on note I le milieu de $[\mathrm{OO}']$.
Soit H le projeté orthogonal de M sur la droite (OO'), on a donc
$\mathrm{MO}^2 - \mathrm{MO}'^2 = 2\overrightarrow{\mathrm{HI}}.\overrightarrow{\mathrm{O'O}} = \overrightarrow{2\mathrm{IH}}.\overrightarrow{\mathrm{OO}'}$.
Un point M a donc même puissance par rapport aux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ si et seulement si son projeté orthogonal H sur la droite (OO') vérifie $\overrightarrow{2\mathrm{IH}}.\overrightarrow{\mathrm{OO}'} = R^2 - R'^2$
En particulier, si les deux cercles ont même rayon, l'ensemble des points ayant même puissance par rapport aux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ est la médiatrice du segment $[\mathrm{OO}']$.

Exercice 5 Droites et paraboles

Lorsque le plan est muni d'un repère, chercher les points $M(x, y)$ d'intersection entre deux ensembles définis chacun par une équation revient souvent à chercher les réels x vérifiant les deux équations.

Pour toute droite d de pente p, il existe un réel q tel que l'équation réduite de d soit $y = px + q$. La valeur de q est déterminée en remplaçant x et y par les coordonnées d'un point connu de la droite d.

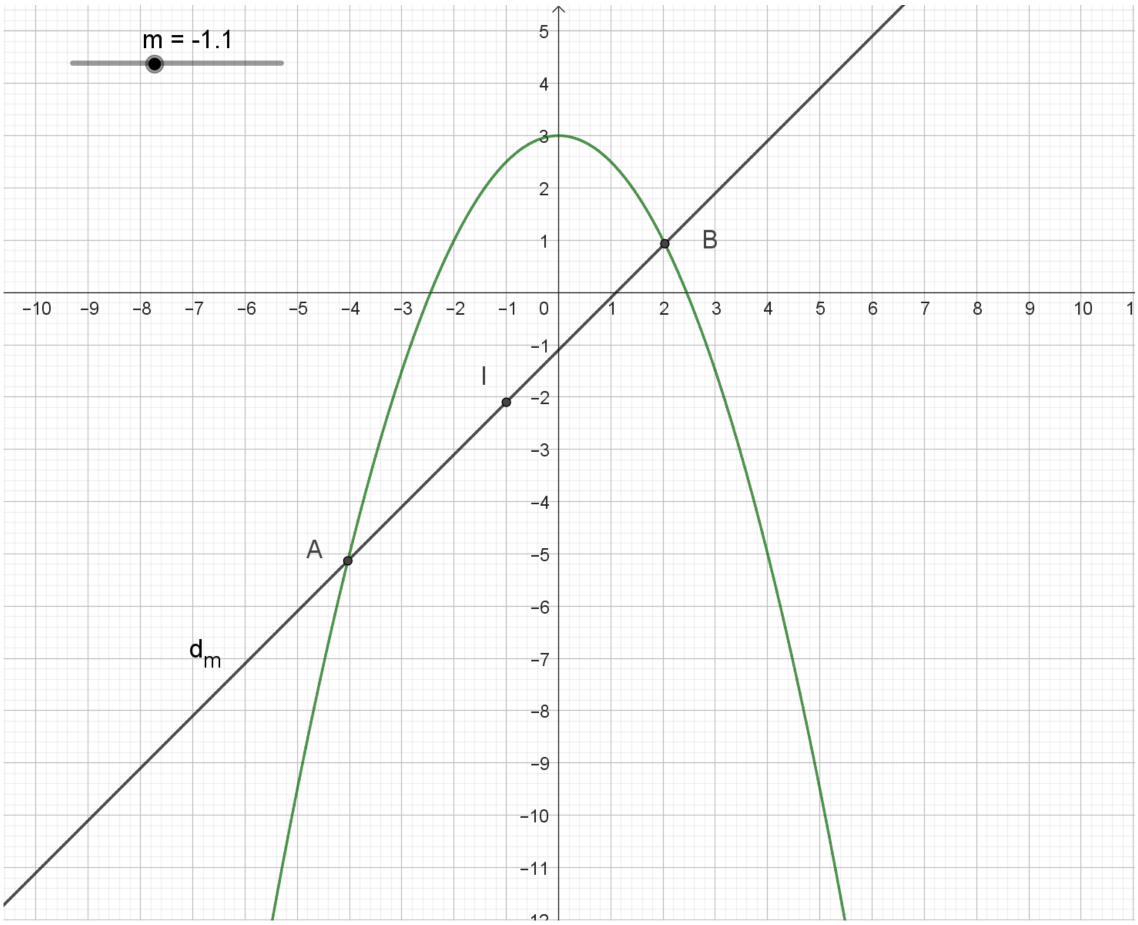
Pour déterminer que deux ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont égaux, on peut montrer que si un objet est dans $\mathcal{A}$ alors il est dans $\mathcal{B}$ et que, réciproquement, si un objet est dans $\mathcal{B}$ alors il est dans $\mathcal{A}$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère :

- la représentation graphique $\mathcal{P}$ de la fonction f définie sur **R** par $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3$;
- pour tout réel m, la droite d_m d'équation $y = x + m$.

1. Construire la courbe $\mathcal{P}$.
2. Déterminer, suivant la valeur de m, le nombre de points d'intersection de $\mathcal{P}$ et d_m.
3. Lorsque $\mathcal{P}$ et d_m ont deux points d'intersection A et B, déterminer le lieu géométrique du milieu I du segment [AB], c'est-à-dire l'ensemble de tous les points I quand m prend toutes les valeurs donnant au moins un point d'intersection entre $\mathcal{P}$ et d_m.
4. Lorsque $\mathcal{P}$ et d_m ont un seul point d'intersection, que représente la droite d_m pour la fonction f ?

1.



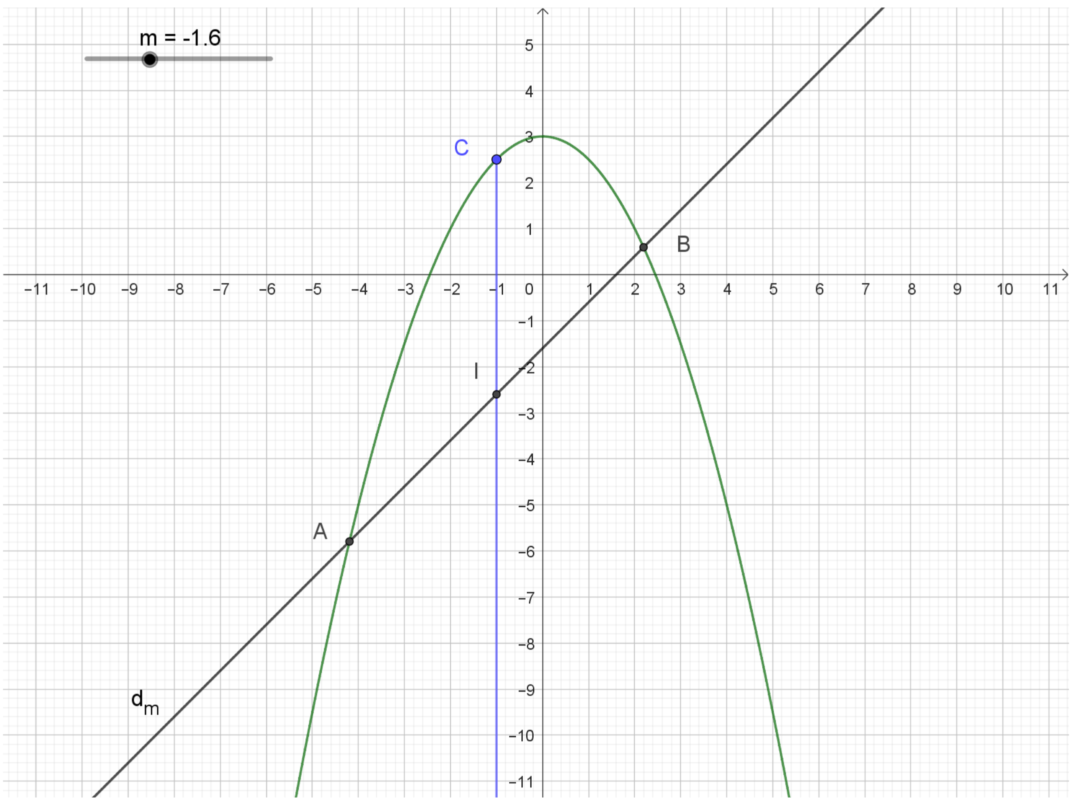
2. Un point $M(x, y)$ est point d'intersection de $\mathcal{P}$ et d_m si et seulement si ses coordonnées vérifient les équations $y = f(x)$ et $y = x + m$.

   On se ramène donc à résoudre l'équation $-\frac{1}{2}x^2 + 3 = x + m$ qui équivaut à $x^2 + 2x + 2(m - 3) = 0$.

   Le discriminant de cette équation est $\Delta = 4 - 8(m - 3) = 4(7 - 2m)$. On en déduit que :

- Si $m < \frac{7}{2}$, alors $\mathcal{P}$ et d_m ont deux points d'intersection.
- Si $m = \frac{7}{2}$, alors $\mathcal{P}$ et d_m ont un unique point d'intersection C, dont l'abscisse est -1.
- Si $m > \frac{7}{2}$, alors $\mathcal{P}$ et d_m n'ont aucun point d'intersection.

3. Si $\mathcal{P}$ et d_m ont deux points d'intersection notés A et B, le milieu I de [AB] a pour abscisse la demi-somme des solutions de l'équation $x^2 + 2x + (m-3) = 0$ soit $-\frac{2}{2} = -1$. Dans le cas où $\mathcal{P}$ et d_m ont un seul point d'intersection, les points A, B et I sont confondus.
Le point I a donc une abscisse constante égale à -1. Il appartient donc à la droite d'équation $x = -1$. De plus, comme I est un point de la droite d_m son ordonnée vaut $-1+m$ où $m \in \left]-\infty, \frac{7}{2}\right]$ soit $-1+m \leq \frac{5}{2}$, le point I appartient donc à une demi-droite $\mathcal{D}$ d'extrémité C incluse dans la droite d'équation $x = -1$ où C est le point de $\mathcal{P}$ de coordonnées $\left(-1, \frac{5}{2}\right)$.
Réciproquement, si I est un point de la demi-droite $\mathcal{D}$ alors le point I a pour coordonnées $(-1, b)$ où $b \leq \frac{5}{2}$. Il existe donc un réel q tel que la droite d de pente 1 passant par I ait pour équation $y = x + q$. Comme I appartient à cette demi-droite, $b = -1 + q$ doit $q = b + 1$ et la droite d a pour équation $y = x + b + 1$. D'après la question 2., comme $b + 1 \leq \frac{7}{2}$, $\mathcal{P}$ et d ont un ou deux points d'intersection définissant un segment dont I est le milieu.
On peut donc dire que le lieu géométrique du point I est la demi-droite $\mathcal{D}$ d'extrémité C incluse dans la droite d'équation $x = 1$.
Remarque : on dit que lorsque m *décrit* $\left]-\infty, \frac{7}{2}\right]$, le point I *décrit* la demi-droite $\mathcal{D}$.



4. Lorsque $\mathcal{P}$ et d_m ont un unique point commun, la droite d_m est la droite de coefficient directeur 1 au point C, qui est le point de $\mathcal{P}$ d'abscisse 1. Or $f'(-1) = 1$ puisque $f'(x) = -x$. Donc $d_{\frac{7}{2}}$ est la tangente en C à $\mathcal{P}$.

Exercice 6

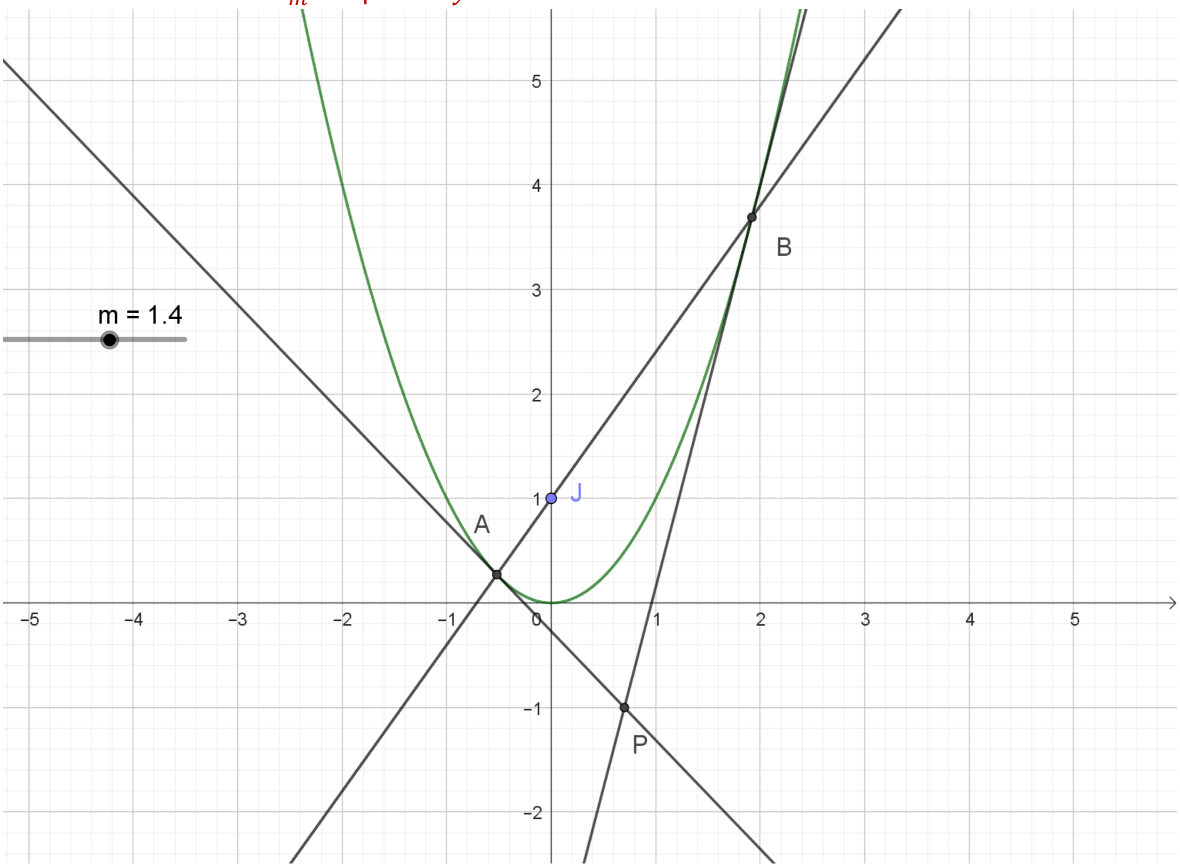
Propriété 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère. Soit a un réel de l'intervalle I et A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a. Si f est dérivable en a, alors $\mathcal{C}_f$ admet au point A une tangente d'équation $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

Propriété 2 : Les points d'intersections des courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de deux fonctions f et g sont les points de ces courbes dont les abscisses sont solutions de $f(x) = g(x)$.

Soit f la fonction carré et $\mathcal{P}$ sa représentation graphique dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan. On considère le point J de coordonnées $(0,1)$ et une droite passant par J.

1. Montrer que soit cette droite est l'axe des ordonnées, soit il existe un réel m tel que cette droite ait pour équation $y = mx + 1$. On notera alors D_m cette droite.
2. Montrer que, dans le deuxième cas, la droite D_m coupe la parabole $\mathcal{P}$ en deux points A et B, d'abscisses respectives a et b telles que $ab = -1$.
3. Montrer que les tangentes T_a et T_b à $\mathcal{P}$ se coupent en un point P d'ordonnée constante, ordonnée à déterminer.

1. L'axe des ordonnées est bien une droite passant par J. C'est celle qui n'a pas de coefficient directeur. Si on note m le coefficient directeur de toute autre droite passant par J, il existe un réel p telle que cette droite D_m ait pour équation $y = mx + p$. L'appartenance de J à cette droite donne $p = 1$.
2. On considère donc la droite D_m d'équation $y = mx + 1$.



Les abscisses a et b des points A et B, points d'intersection de la parabole $\mathcal{P}$ avec la droiteD_m sont les solutions de l'équation $x^2 = mx - 1$ soit $x^2 - mx - 1 = 0$.

Le produit de ces deux solutions est donc $ab = \frac{-1}{1} = -1$.

3. La tangente T_a a pour équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ soit $y = a^2 + 2a(x - a)$ soit $y = 2ax - a^2$.
De même la tangente T_b a pour équation $y = 2bx - b^2$ soit, d'après le 2. et parce que la droite D_m ne peut passer par l'origine donc $a \neq 0$, $y = -\frac{2}{a}x - \frac{1}{a^2}$.

L'abscisse du point P est donc la solution de l'équation $2ax-a^2=-\frac{2}{a}x-\frac{1}{a^2}$ soit $2\left(a+\frac{1}{a}\right)x=a^2-\frac{1}{a^2}$ soit $2\left(a+\frac{1}{a}\right)x=\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a-\frac{1}{a}\right)$. Or pour tout réel $a\neq 0$, $a+\frac{1}{a}=0$ équivaut à $a^2+1=0$, ce qui est impossible donc l'abscisse point P est donc $x_{\mathrm{P}}=\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)$ et, puisque P est un point de T_a, son ordonnée est $y_{\mathrm{P}}=2a\times\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)-a^2=a^2-1-a^2=-1$ qui ne dépend pas de a.

Exercice 7 Orthocentre et hyperbole

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, si A , B et C sont trois points du plan tels que $A\neq B$:

- un point $M(x,y)$ appartient à la droite (AB) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires ;
- un point $M(x,y)$ appartient à la droite passant par C et perpendiculaire à la droite (AB) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.

C'est en traduisant sur les coordonnées (déterminant ou produit scalaire nul) qu'on obtient une équation de chacune de ces droites.

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $y=\frac{1}{x}$ et trois points deux à deux distincts A,B et C d'abscisses respectives a, b et c (non nulles) de cette hyperbole.

a. Déterminer une équation cartésienne de la hauteur d_A issue du point A dans le triangle ABC.

b. En déduire une équation de la hauteur d_B issue du point B dans le triangle ABC.

c. Montrer que l'orthocentre H du triangle ABC appartient à l'hyperbole $\mathcal{H}$.

a. Les points A,B et C d'abscisses respectives a, b et c sont des points de l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $y=\frac{1}{x}$. On a donc $A\left(a,\frac{1}{a}\right),B\left(b,\frac{1}{b}\right),C\left(c,\frac{1}{c}\right)$.
Un point $M(x,y)$ appartient à la hauteur d_A issue du point A dans le triangle ABC si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-a\\ y-\frac{1}{a}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}c-b\\ \frac{1}{c}-\frac{1}{b}\end{pmatrix}$ sont orthogonaux soit $(x-a)(c-b)+\left(y-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)=0$ c'est-à-dire $bc(x-a)(c-b)+\left(y-\frac{1}{a}\right)(b-c)=0$ soit, puisque les points B,C sont distincts et donc $b\neq c$, $bc(x-a)+\left(\frac{1}{a}-y\right)=0$. L'équation réduite de d_A est donc $y=bcx+\frac{1}{a}-abc$.

b. En permutant les rôles de A,B et C, a devient b, b devient c et c devient a et l'équation réduite de la hauteur d_B issue du point B dans le triangle ABC est $y=cax+\frac{1}{b}-bca$.

c. Les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC sont les solutions du système $\begin{cases}y=bcx+\frac{1}{a}-abc\\ y=cax+\frac{1}{b}-bca\end{cases}$ qui équivaut au système $\begin{cases}(bc-ca)x+\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=0\\ y=bcx+\frac{1}{a}-abc\end{cases}$.
La première équation s'écrit $c(b-a)x=\frac{a-b}{ab}$ soit, puisque A,B sont distincts et donc $a\neq b$, $x=-\frac{1}{abc}$.
L'ordonnée du point H est alors $y=bc\left(-\frac{1}{abc}\right)+\frac{1}{a}-abc=-\frac{1}{a}+\frac{1}{a}-abc=-abc$.
On constate que l'ordonnée de H est l'inverse de son abscisse, ce qui signifie que H est bien un point de l'hyperbole $\mathcal{H}$.