



Exercice 1 – Inégalités et calcul littéral

Définition : on dit qu'un nombre a est inférieur ou égal à un nombre b lorsque $b - a \geq 0$.

Cette définition conduit à une méthode pratique pour comparer deux nombres.

Propriété : pour tous réels a et b strictement positifs, si $a \leq b$, alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

- Démontrer que, pour tous réels a, b, c strictement positifs, si $a \leq b + c$ alors $\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}$.
- Soit, pour tout entier naturel non nul n , la somme $S_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$.
 - Justifier que, pour tout entier naturel non nul n , $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.
 - En déduire que, pour tout entier naturel non nul n , $S_n < 1$.
 - Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $|S_n - 1| < 10^{-5}$.
- Pour tous réels a, b, c strictement positifs, si on pose $E = \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} - \frac{a}{1+a}$ l'inégalité à démontrer équivaut à $E \geq 0$. De plus le signe de E est celui de son numérateur N après réduction au même dénominateur.
 Or, $N = b(1+c)(1+a) + c(1+b)(1+a) - a(1+b)(1+c)$
 $N = b(1+c+a+ca) + c(1+b+a+ba) - a(1+b+c+bc)$
 $N = (b+c-a) + bc + ba + bca + cb + ca + cba - ab - ac - abc$
 $N = (b+c-a) + 2bc + abc$
 Or $b+c-a \geq 0$ car $a \leq b+c$ et $2bc + abc > 0$ car a, b, c sont strictement positifs. On en déduit que $E \geq 0$.
- Pour tout entier naturel non nul n , $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$.
 - On en déduit que, pour tout entier naturel non nul n ,
 $S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$
 soit, après simplification, $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. Comme $n+1 > 0$, on a bien $S_n < 1$.
 - Comme $S_n < 1$, $|S_n - 1| = 1 - S_n = \frac{1}{n+1}$ d'après le **b.** donc $|S_n - 1| < 10^{-5}$ équivaut à $\frac{1}{n+1} < 10^{-5}$ soit, puisque les nombres considérés sont strictement positifs, $n+1 > 10^5$. La plus petite valeur de n telle que $|S_n - 1| < 10^{-5}$ est donc 10^5 .

Exercice 2 – Polynômes et somme

Définition : Soit n un entier naturel, on appelle fonction polynôme (ou polynôme) de degré n , une fonction P pour laquelle il existe des réels $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ tels que $a_n \neq 0$ et pour tout réel x , $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.

Les réels $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ sont appelés les coefficients de P .

Propriété : soit P et Q deux fonctions polynômes. P et Q sont égales (c'est-à-dire pour tout réel x , $P(x) = Q(x)$) si et seulement si P et Q ont même degré et les mêmes coefficients.

- Déterminer une fonction polynôme P de degré 3 telle que, pour tout nombre réel x , $P(x+1) - P(x) = x^2$.
- En déduire que, pour tout entier naturel non nul n , $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- Soit P une fonction polynôme de degré 3. Il existe alors quatre réels a, b, c, d tels que, pour tout réel x ,
 $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
 Alors, pour tout nombre réel x ,
 $P(x+1) - P(x) = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d - ax^3 - bx^2 - cx - d$
 $P(x+1) - P(x) = a(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + b(x^2 + 2x + 1) + cx + c + d - ax^3 - bx^2 - cx - d$
 $P(x+1) - P(x) = 0x^3 + 3ax^2 + (3a + 2b)x + (a + b + c)$
 On aura donc, pour tout nombre réel x , $P(x+1) - P(x) = x^2$ si et seulement si $\begin{cases} 3a = 1 \\ 3a + 2b = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$

soit $\begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ 2b = -1 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{6} \end{cases}$. Le nombre d peut être quelconque. Pour simplifier les calculs, on choisit $d = 0$ et on obtient $P(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$.

2. D'après la question précédente, pour tout entier naturel non nul n , $P(n+1) - P(n) = n^2$. Donc :

$$1^2 = P(2) - P(1)$$

$$2^2 = P(3) - P(2)$$

$$3^2 = P(4) - P(3)$$

...

$$n^2 = P(n+1) - P(n)$$

d'où, en ajoutant membre à membre ces égalités, $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = P(n+1) - P(1)$.

$$\text{Or, } P(n+1) - P(1) = n^2 + P(n) - 0 = \frac{1}{3}n^3 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{n}{6}(2n^2 + 3n + 1).$$

$$\text{D'autre part, } (2n+1)(n+1) = 2n^2 + n + 2n + 1 = 2n^2 + 3n + 1.$$

$$\text{On a donc bien, pour tout entier naturel non nul } n, 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}.$$

Exercice 3 – Tangentes à une parabole

Propriété : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère. Soit a un réel de l'intervalle I et A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a . Si f est dérivable en a , alors $\mathcal{C}_f$ admet au point A une tangente d'équation $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

La tangente à $\mathcal{C}_f$ en A est donc la droite passant par A et de pente $f'(a)$.

Dans le plan muni d'un repère on considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$.

1. Montrer que, passant par le point $C(1, -3)$, il existe deux tangentes à la parabole $\mathcal{P}$ et en donner les équations réduites.

2. Plus généralement, on veut déterminer l'ensemble des points $M(x_0, y_0)$ du plan d'où l'on peut mener au moins une tangente à la parabole $\mathcal{P}$.

a. Soit a un nombre réel et $\mathcal{T}$ la tangente à $\mathcal{P}$ au point de $\mathcal{P}$ d'abscisse a . Démontrer que $\mathcal{T}$ passe par M si et seulement si $a^2 - 2ax_0 + y_0 = 0$.

b. En déduire l'ensemble des points $M(x_0, y_0)$ du plan d'où l'on peut mener deux tangentes à la parabole $\mathcal{P}$ et l'ensemble des points $M(x_0, y_0)$ du plan d'où l'on peut mener une seule tangente à la parabole $\mathcal{P}$.

1. Pour tout nombre réel a , la tangente à la parabole $\mathcal{P}$ au point A d'abscisse a a pour pente $f'(a)$. Cette tangente passe par le point C (qui n'est pas un point de $\mathcal{P}$) si et seulement si $f'(a)$ est la pente de la droite (AC) c'est-à-dire

$$f'(a) = \frac{a^2 - (-3)}{a - 1} \text{ soit } 2a = \frac{a^2 + 3}{a - 1} \text{ soit } a \neq 1 \text{ et } 2a^2 - 2a = a^2 + 3$$

$$\text{soit } a \neq 1 \text{ et } a^2 - 2a - 3 = 0.$$

L'équation du second degré admet deux solutions -1 et 3 (distinctes de 1). Il existe donc bien deux tangentes à la parabole $\mathcal{P}$ passant par le point C : la tangente $\mathcal{T}_1$ au point $A_1(3, 9)$ et la tangente $\mathcal{T}_2$ au point $A_2(-1, 1)$.

Les équations réduites de ces tangentes sont $y = f'(x - a) + f(a)$ soit :

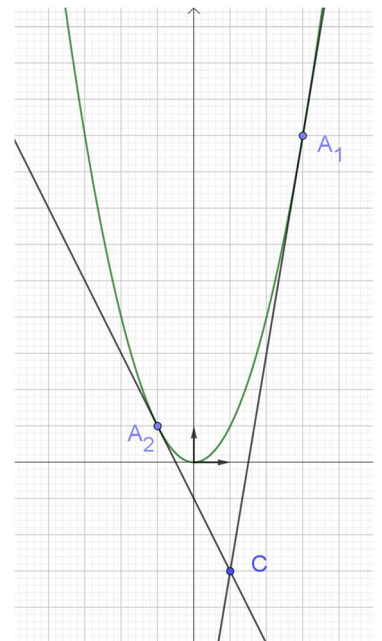
$$\text{- pour } \mathcal{T}_1, y = 6(x - 3) + 9 \text{ soit } y = 6x - 9;$$

$$\text{- pour } \mathcal{T}_2, y = -2(x + 1) + 1 \text{ soit } y = -2x - 1.$$

2. a. On reprend le raisonnement précédent dans le cas général. La tangente à la parabole $\mathcal{P}$ au point A d'abscisse a par le point M si et seulement si $M \in \mathcal{P}$ ou $f'(a) = \frac{a^2 - y_0}{a - x_0}$ soit $a = x_0$ ou $2a(a - x_0) = a^2 - y_0$ c'est-à-dire soit $a = x_0$ ou $2a^2 - 2ax_0 = a^2 - y_0$ soit $a^2 - 2ax_0 + y_0 = 0$ (car si $a = x_0$ alors $y_0 = a^2$ et l'équation du second degré est vérifiée).

b. On peut mener deux tangentes à la parabole si et seulement si l'équation admet deux solutions distinctes c'est-à-dire son discriminant est strictement positif soit $4x_0^2 - 4y_0 > 0$ soit $x_0^2 > y_0$, ce qui signifie que le point M est situé en dessous de la parabole.

On peut mener une seule tangente à la parabole si l'équation admet une unique solution c'est-à-dire $x_0^2 = y_0$, ce qui signifie que le point M est situé sur la parabole.



Exercice 4 – Inégalité et fonction convexe

Soit f et g deux fonctions définies sur un même ensemble E et dont les courbes représentatives dans le plan muni d'un repère sont $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Étudier les positions relatives des deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ revient à étudier le signe de $f(x) - g(x)$ sur l'ensemble E .

Soit f la fonction carré et $\mathcal{P}$ sa représentation graphique dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1. Montrer que si A et B sont deux points de $\mathcal{P}$ d'abscisses respectives a et b telles que $a < b$, alors la droite (AB) se situe au-dessus de $\mathcal{P}$ sur l'intervalle $[a, b]$.

On dit alors que la fonction carré est une fonction *convexe*.

2. a. Justifier qu'un point $N(x_N, y_N)$ du plan appartient au segment [AB] si, et seulement si, il existe un réel t tel que $t \in [0, 1]$ et $\overrightarrow{NB} = t\overrightarrow{AB}$. En déduire l'expression de x_N et y_N en fonction de a , b et t .
b. Montrer que la position relative du segment [AB] et de la parabole $\mathcal{P}$ sur l'intervalle $[a, b]$ se traduit par : pour tout réel $t \in [0, 1]$, $f(ta + (1 - t)b) \leq tf(a) + (1 - t)f(b)$.
c. Quelle inégalité vue dans la fiche 2 retrouve-t-on dans le cas où $t = \frac{1}{2}$?

1. Soit g la fonction affine représentée par la droite (AB). Il s'agit de déterminer une expression de $g(x)$ et de montrer que pour tout réel $x \in [a, b]$, $f(x) - g(x) \leq 0$.

On a $A(a, a^2)$ et $B(b, b^2)$.

Un point $N(x, y)$ appartient à la droite (AB) si et seulement si

$\overrightarrow{AN} \begin{pmatrix} x - a \\ y - a^2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} b - a \\ b^2 - a^2 \end{pmatrix}$ sont colinéaires,

c'est-à-dire $(x - a)(b^2 - a^2) - (y - a^2)(b - a) = 0$

soit, en factorisant et en simplifiant par $(b - a)$ puisque $a \neq b$,

$$y = a^2 + (a + b)(x - a)$$

$$\text{soit } y = (a + b)x - ab.$$

$$\text{Alors } f(x) - g(x) = x^2 - (a + b)x + ab.$$

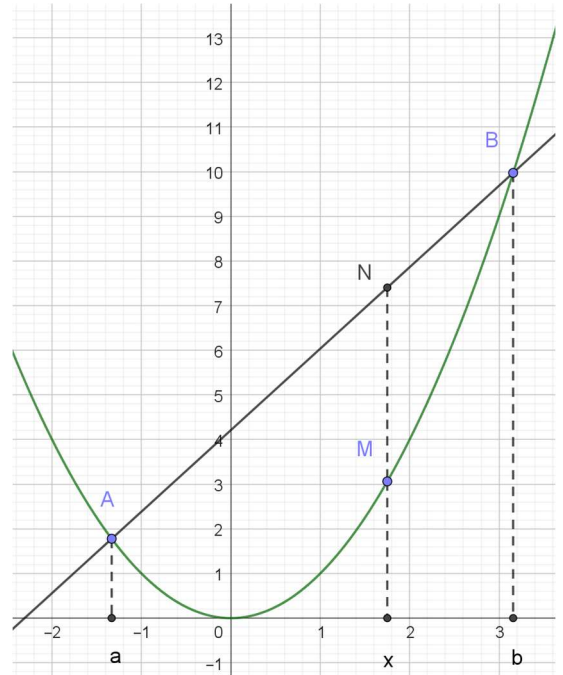
Le discriminant associé à ce polynôme du second degré est $\Delta =$

$$(a + b)^2 - 4ab = a^2 + b^2 + 2ab - 4ab$$

$$\text{Soit } \Delta = (a - b)^2.$$

On sait déjà que a et b sont les deux racines de ce trinôme.

Comme le coefficient de x^2 est 1, on en déduit que, sur l'intervalle $[a, b]$, $f(x) - g(x) \leq 0$ c'est-à-dire la droite (AB) se situe au-dessus de $\mathcal{P}$.



2. a. Un point $N(x_N, y_N)$ du plan appartient au segment [AB] si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{NB}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires (c'est-à-dire il existe un réel t tel que $\overrightarrow{NB} = t\overrightarrow{AB}$), de même sens et de même sens et $NB \leq AB$, c'est-à-dire $t \in [0, 1]$.

$$\overrightarrow{NB} = t\overrightarrow{AB} \text{ s'écrit } \begin{cases} b - x_N = t(b - a) \\ b^2 - y_N = t(b^2 - a^2) \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_N = ta + (1 - t)b \\ y_N = ta^2 + (1 - t)b^2 \end{cases}$$

- b. La position relative du segment [AB] et de la parabole $\mathcal{P}$ sur l'intervalle $[a, b]$ se traduit par l'ordonnée du point N devant être supérieure ou égale à celle du point M. Ces deux points ont même abscisse x et il

$$\text{existe un réel } t \in [0, 1] \text{ tel que } \overrightarrow{NB} = t\overrightarrow{AB} \text{ soit } \begin{cases} x_N = ta + (1 - t)b \\ y_N = ta^2 + (1 - t)b^2 \end{cases}$$

$$\text{L'inégalité } y_M \leq y_N \text{ s'écrit donc } f(ta + (1 - t)b) \leq ta^2 + (1 - t)b^2$$

$$\text{soit } f(ta + (1 - t)b) \leq tf(a) + (1 - t)f(b).$$

- c. $t = \frac{1}{2}$ signifie que N est le milieu de [AB]. L'inégalité précédente s'écrit alors $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b)$
soit $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$.

Exercice 5 – Aires maximales, aires minimales

Propriété 1 : l'aire d'un triangle MNP est égale à $\mathcal{A} = \frac{1}{2} MN \times MP \times \sin(\widehat{NMP})$.

Définition : soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $a \in I$, la fonction f admet un maximum en a sur l'intervalle I lorsque, pour tout nombre réel x de I , $f(x) \leq f(a)$.

Propriété 2 : soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit $a \in I$, la fonction f admet un extremum en a si et seulement si sa dérivée f' s'annule en a en changeant de signe.

On considère un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 3$ et $AC = 4$. On note I le milieu du segment $[AC]$. Un point P se déplace sur le segment $[AB]$ et un point Q se déplace sur le segment $[BC]$ de telle façon que l'aire du triangle BPQ reste constante égale à 2. On note $BP = x$ et $BQ = y$.

1. Montrer que $yx = 5$ et en déduire l'intervalle décrit par x et l'intervalle décrit par y .
2. Montrer que l'aire du triangle PIQ est égale à $f(x) = x - 2 + \frac{3}{x}$.
3. En déduire que cette aire admet
 - a. un maximum et préciser le(s) position(s) des points P et Q correspondant à ce maximum.
 - b. un minimum et préciser le(s) position(s) des points P et Q correspondant à ce minimum.

1. D'après la propriété rappelée dans l'énoncé, l'aire du triangle BPQ est égale à $\mathcal{A}_{BPQ} = \frac{1}{2} BP \times BQ \times \sin \widehat{PBQ} = \frac{1}{2} xy \sin \widehat{ABC}$.

Or, en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle BAC rectangle en A, $BC^2 = BA^2 + AC^2 = 9 + 16 = 25$ donc $BC = 5$.

Donc $\sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5}$. On en déduit que $2 = \frac{1}{2} xy \times \frac{4}{5}$ soit $xy = 5$.

Comme P et Q sont respectivement placés sur $[AB]$ et $[BC]$, on doit déjà avoir $0 < x \leq 3$ et $0 < y \leq 5$.

De plus, si $x < 1$ alors $xy < 5$ donc nécessairement $x \geq 1$. De même, nécessairement, $y \geq 1$.

De plus, $0 < 1 \leq y \leq 5$ équivaut à $0 < 1 \leq \frac{5}{x} \leq 5$ soit $0 < \frac{1}{5} \leq \frac{x}{5} \leq 1$ soit $0 < 1 \leq x \leq 5$.

Donc, si $0 < 1 \leq x \leq 3$, on pourra bien avoir $1 \leq y \leq 5$ donc x décrit l'intervalle $[1, 3]$.

De même $0 < 1 \leq x \leq 3$ équivaut à $0 < 1 \leq \frac{5}{y} \leq 3$ soit $0 < \frac{1}{3} \leq \frac{y}{5} \leq 1$ soit $0 < \frac{5}{3} \leq y \leq 5$. Donc y décrit l'intervalle $[\frac{5}{3}, 5]$.

2. L'aire du triangle PIQ est égale à $f(x) = \mathcal{A}_{ABC} - \mathcal{A}_{BPQ} - \mathcal{A}_{PAI} - \mathcal{A}_{QIC}$.

Or, comme les triangles ABC et API sont rectangles en A et I est le milieu du segment $[AC]$,

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{4 \times 3}{2} = 6, \mathcal{A}_{BPQ} = 2, \mathcal{A}_{PAI} = \frac{PA \times AI}{2} = \frac{(3-x) \times 2}{2} = 3 - x \text{ et } \mathcal{A}_{QIC} = \frac{1}{2} QC \times IC \times \sin(\widehat{BCA})$$

$$\text{soit } \mathcal{A}_{QIC} = \frac{1}{2} (5 - y) \times 2 \times \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \left(5 - \frac{5}{x} \right) = 3 - \frac{3}{x}.$$

$$\text{On en déduit que } f(x) = 6 - 2 - (3 - x) - \left(3 - \frac{3}{x} \right) = x + \frac{3}{x} - 2.$$

3. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1, 3]$ et pour tout nombre réel x de $[1, 3]$, $f'(x) = 1 - \frac{3}{x^2} = \frac{x^2 - 3}{x^2}$

soit $f'(x) = \frac{(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}{x^2}$. Sur l'intervalle $[1, 3]$,

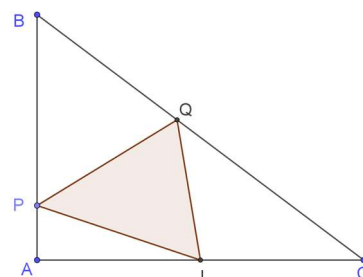
$f'(x)$ a le signe de $(x - \sqrt{3})$.

On en déduit le tableau de variation ci-contre.

$$f(\sqrt{3}) = \sqrt{3} + \frac{3}{\sqrt{3}} - 2 = \sqrt{3} + \sqrt{3} - 2 = 2\sqrt{3} - 2$$

On en déduit que :

- a. l'aire du triangle PIQ est maximale lorsque $x = 1$ ($BP = 1$ et $BQ = 5$ soit $Q = C$) ou lorsque $x = 3$ ($BP = 3$ soit $P = A$ et $BQ = 5$), ce maximum étant 2.
- b. l'aire du triangle PIQ est minimale lorsque $x = \sqrt{3}$, ce minimum étant $2\sqrt{3} - 2$.



x	1	$\sqrt{3}$	3
$f'(x)$	-	0	+
f	2	$2\sqrt{3} - 2$	2

Exercice 6 – Nombres pentagonaux

Définition : on dit qu'une suite (u_n) est arithmétique lorsqu'il existe un nombre réel r tel que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = r$.

Méthode : démontrer qu'une suite est arithmétique revient donc à démontrer que la différence $u_{n+1} - u_n$ entre deux termes consécutifs de la suite ne dépend pas de n .

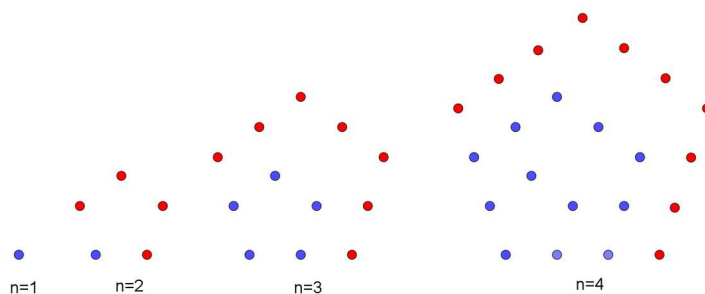
Propriétés :

(1) Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r . Alors $u_n = u_1 + (n - 1)r$.

(2) Soit (u_n) une suite arithmétique. Alors $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$.

Partant d'un point (étape 1), on construit successivement des pentagones réguliers en ajoutant un point sur la ligne du bas comme sur la figure ci-contre.

On note u_n le nombre de points (rouges ou bleus) obtenus à l'étape n .



1. Donner les valeurs de u_1, u_2, u_3, u_4 .
2. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , $u_{n+1} = u_n + 3n + 1$.
3. Déterminer la nature de la suite de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$.
4. En exprimant, pour $n < 1$ la somme $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}$ de deux manières différentes, en déduire une expression explicite de u_n en fonction de n .
5. Quel est le nombre pentagonal u_{2026} ?

1. On vérifie sur les schémas que $u_1 = 1, u_2 = 1 + 4 = 5, u_3 = 5 + 7 = 12, u_4 = 12 + 10 = 22$.
2. Pour tout entier naturel non nul n , pour passer de l'étape n à l'étape $n + 1$, on ajoute trois côtés de pentagone contenant chacun $n + 1$ points mais avec deux points sommets communs.
Donc $u_{n+1} = u_n + 3(n + 1) - 2 = u_n + 3n + 1$
3. Pour tout entier naturel non nul n , $v_{n+1} - v_n = (u_{n+2} - u_{n+1}) - (u_{n+1} - u_n) = 3(n + 1) + 1 - (3n + 1)$
Soit $v_{n+1} - v_n = 3$. La suite (v_n) est donc une suite arithmétique de raison 3.
On sait d'ailleurs que, pour tout entier naturel non nul n , $v_n = 3n + 1$.
4. On peut écrire
 $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_{n-2} + v_{n-1} = (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + (u_4 - u_3) + \dots + (u_{n-1} - u_{n-2}) + (u_n - u_{n-1})$
Les termes de cette somme dite télescopique s'annulent deux à deux sauf deux termes et $S_n = u_n - u_1$.
D'autre part, S_n est la somme des $n-1$ premiers termes consécutifs de la suite arithmétique (v_n) donc
 $S_n = (n - 1) \times \frac{v_1 + v_{n-1}}{2} = (n - 1) \times \frac{4 + 3(n-1) + 1}{2} = \frac{(n-1)(3n+2)}{2}$.
Remarque : attention, ici la somme comprend $n - 1$ termes et non n .
Des deux expressions de S_n , on déduit que $u_n = u_1 + \frac{(n-1)(3n+2)}{2} = 1 + \frac{(n-1)(3n+2)}{2}$.
Remarque : on peut alors vérifier le résultat obtenu sur les valeurs 1, 2, 3 et 4 calculées à la question 1.
5. $u_{2026} = 1 + \frac{2025 \times (3 \times 2026 + 2)}{2} = 1 + 1\,025 \times 3\,040 = 6\,156\,001$.

Exercice 7 – Produit scalaire et orthogonalité

Définition 1 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de représentants respectifs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ($\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$).

On note p le réel $p = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$ si les points B et C sont distincts du point A et $p = 0$ sinon.

(On admet que p ne dépend pas des représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ choisis pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$).

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre p .

Définition 2 : On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de représentants respectifs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux lorsque soit l'un des vecteurs est le vecteur nul soit les droites (AB) et (AC) sont orthogonales.

(On admet que l'orthogonalité ne dépend pas des représentants choisis pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$).

Pour calculer un produit scalaire dans un problème de géométrie plane, il faut principalement avoir en tête les deux expressions :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$ si les points B et C sont distincts du point A ;

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$ où H est le projeté orthogonal de C sur (AB) .

Propriété : si les points C et D ont le même projeté orthogonal sur la droite (AB) , alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

Pour démontrer des orthogonalités, il est souvent utile de se référer :

- au théorème 1 : « $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ » ;
- à des décompositions de vecteurs grâce à la relation de Chasles ;
- aux propriétés opératoires du produit scalaire.

Dans cet exercice, les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. a. Soit MNP un triangle et I le milieu du segment $[NP]$. Démontrer que :

$$MN^2 + MP^2 = 2MI^2 + \frac{NP^2}{2} \text{ et } MN^2 - MP^2 = 2\vec{IM} \cdot \vec{NP}.$$

On appelle ce résultat *théorème de la médiane*.

b. Soit ABCD un quadrilatère, I le milieu de [AC] et J le milieu de [BD]. Montrer que :

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 4IJ^2 + AC^2 + BD^2$$

c. En déduire que la somme des carrés des longueurs des côtés d'un quadrilatère est supérieure ou égale à la somme des carrés des longueurs des diagonales. Dans quel cas y a-t-il égalité ?

2. Soit ABCD un quadrilatère dont les diagonales [AC] et [BD] se coupent en O. On note respectivement H et K les orthocentres des triangles OAB et OCD.

a. Justifier l'égalité $\vec{AC} \cdot \vec{BO} = \vec{AC} \cdot \vec{HO}$. En déduire les égalités $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = \vec{AC} \cdot \vec{HK} = \vec{HK} \cdot \vec{BD}$.

b. Soit I et J les milieux respectifs des segments [AD] et [BC]. Démontrer que $\vec{AC} - \vec{BD} = 2\vec{IJ}$.

c. En déduire que les droites (HK) et (IJ) sont perpendiculaires.

1. a. Soit MNP un triangle et I le milieu du segment [NP].

$$\text{Alors, } MN^2 + MP^2 = (\vec{MI} + \vec{IN})^2 + (\vec{MI} + \vec{IP})^2$$

$$\text{soit } MN^2 + MP^2 = MI^2 + IN^2 + 2\vec{MI} \cdot \vec{IN} + MI^2 + IP^2 + 2\vec{MI} \cdot \vec{IP}.$$

$$\text{soit } MN^2 + MP^2 = 2MI^2 + IN^2 + IP^2 + 2\vec{MI} \cdot (\vec{IN} + \vec{IP})$$

$$\text{Or } I \text{ est le milieu de } [NP] \text{ donc } IN^2 = IP^2 = \left(\frac{NP}{2}\right)^2 = \frac{NP^2}{4} \text{ et } \vec{IN} + \vec{IP} = \vec{0}$$

$$\text{d'où } MN^2 + MP^2 = 2MI^2 + \frac{NP^2}{2}.$$

$$\text{D'autre part, } MN^2 - MP^2 = (\vec{MI} + \vec{IN})^2 - (\vec{MI} + \vec{IP})^2$$

$$\text{soit } MN^2 - MP^2 = MI^2 + IN^2 + 2\vec{MI} \cdot \vec{IN} - MI^2 - IP^2 - 2\vec{MI} \cdot \vec{IP}$$

$$\text{soit } MN^2 - MP^2 = 2\vec{MI} \cdot \vec{IN} - 2\vec{MI} \cdot \vec{IP} = 2\vec{MI} \cdot (\vec{IN} - \vec{IP}) = 2\vec{MI} \cdot (\vec{IN} + \vec{PI}) = 2\vec{MI} \cdot \vec{PN} = 2\vec{IM} \cdot \vec{NP}.$$

b. En appliquant le théorème de la médiane dans les triangles BAC, DAC et IBD, on obtient :

$$BA^2 + BC^2 = 2BI^2 + \frac{AC^2}{2}, \quad DA^2 + DC^2 = 2DI^2 + \frac{AC^2}{2}$$

$$\text{Et } IB^2 + ID^2 = 2IJ^2 + \frac{BD^2}{2}$$

$$\text{Donc } AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = BA^2 + BC^2 + DA^2 + DC^2$$

$$\text{Soit } AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2BI^2 + \frac{AC^2}{2} + 2DI^2 + \frac{AC^2}{2}$$

$$\text{Soit } AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2\left(2IJ^2 + \frac{BD^2}{2}\right) + AC^2$$

$$\text{soit } AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 4IJ^2 + BD^2 + AC^2$$

c. On déduit immédiatement que la somme $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$ des carrés des longueurs des côtés d'un quadrilatère est supérieure ou égale à la somme $BD^2 + AC^2$ des carrés des longueurs des diagonales puisque $4IJ^2 \geq 0$ et qu'il y a égalité si et seulement si $IJ = 0$ c'est-à-dire le quadrilatère est un parallélogramme.

2. a. Par définition du point H, les points B et H ont le même projeté orthogonal sur (AC) et O est un point de (AC) donc, d'après la propriété rappelée dans l'énoncé, $\vec{AC} \cdot \vec{BO} = \vec{AC} \cdot \vec{HO}$.

On démontre de même que $\vec{AC} \cdot \vec{OD} = \vec{AC} \cdot \vec{OK}$ d'où :

$$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = \vec{AC} \cdot \vec{BO} + \vec{AC} \cdot \vec{OD} = \vec{AC} \cdot \vec{HO} + \vec{AC} \cdot \vec{OK} = \vec{AC} \cdot \vec{HK}.$$

De même, en considérant d'une part le projeté orthogonal commun de A et H sur (BD), d'autre part le projeté orthogonal commun de C et K sur (BD) :

$$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = \vec{AO} \cdot \vec{BD} + \vec{OC} \cdot \vec{BD} = \vec{HO} \cdot \vec{BD} + \vec{OK} \cdot \vec{BD} = \vec{HK} \cdot \vec{BD}$$

$$\text{b. } 2\vec{IJ} = 2\vec{IO} + 2\vec{OJ}.$$

Comme I et J les milieux respectifs des segments [AD] et [BC], $2\vec{IO} = \vec{AO} + \vec{DO}$ et $2\vec{OJ} = \vec{OB} + \vec{OC}$.

$$\text{Donc } 2\vec{IJ} = \vec{AO} + \vec{DO} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{AO} + \vec{OC} + \vec{DO} + \vec{OB} = \vec{AC} + \vec{DB} = \vec{AC} - \vec{BD}.$$

$$\text{c. D'après les deux questions précédentes, } 2\vec{IJ} \cdot \vec{HK} = \vec{AC} \cdot \vec{HK} - \vec{BD} \cdot \vec{HK} = \vec{AC} \cdot \vec{BD} - \vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0.$$

On en déduit que $\vec{IJ} \cdot \vec{HK} = 0$ soit les droites (HK) et (IJ) sont perpendiculaires.

