Pépinière académique de mathématiques

Année 2021-2022 **Stage « filé »**

Classe de première **Fiche numéro 2**

Parution jeudi 18 novembre **Retour attendu pour le lundi 6 décembre**

Exercice 1 Polynômes et calculs de sommes

Une fonction P pour laquelle il existe un triplet de réels (a, b, c) tel que $a \neq 0$ et, pour tout réel x,

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

est dite fonction polynôme de degré 2.

Propriété : Les *coefficients* a, b, c sont alors uniques.

On définirait plus généralement les fonctions polynômes de degré n, entier naturel quelconque, et on parviendrait à la même propriété d'unicité des coefficients, utilisée par exemple dans la suite.

Ainsi une fonction polynôme de degré n est une fonction P pour laquelle il existe un $(n+1)$-uplet de réels $(a_n,\ a_{n-1}, \cdots, a_0)$ tel que $a_n \neq 0$, tel que pour tout réel x, $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$.

1 *a.* Soit a un nombre réel non nul et P le polynôme défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$. On suppose que P admet deux racines (solutions de l'équation $P(x) = 0$) x_1 et x_2. Exprimer $x_1 + x_2$ et $x_1 x_2$ en fonction de a, b et c.

b. Soit P le polynôme défini par $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, où a un nombre réel non nul. On suppose que P admet trois racines x_1, x_2 et x_3. Exprimer $x_1 + x_2 + x_3$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$ et $x_1x_2x_3$ en fonction de a, b, c et d.

2. *a.* Déterminer un polynôme P de degré 2 tel que, pour tout réel , $P(x+1) - P(x) = x$. En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de la somme $1 + 2 + 3 + \cdots + n$.

b. Déterminer un polynôme Q de degré 3 tel que, pour tout réel x, $Q(x+1) - Q(x) = x^2$. En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de la somme $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$.

c. En utilisant une démarche analogue à celle des questions précédentes, montrer que, pour tout entier naturel n , on a $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Exercice 2 Médianes concourantes et droite d'Euler

Le calcul vectoriel est un outil fort utile pour les démonstrations en géométrie :

- caractérisation du milieu I d'un segment [AB] par l'une des égalités vectorielles suivantes :

  $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$ ou $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ ou, pour un point M du plan, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

- parallélisme de droites ou alignement de points par la colinéarité de deux vecteurs
- parallélogramme par l'égalité de deux vecteurs
- relation de Chasles…

Théorème : les médianes d'un triangle sont concourantes. Leur point de concours est appelé centre de gravité du triangle et il est situé au tiers de chaque médiane, en partant de la base.

1. Démonstration du théorème : soit ABC un triangle et soit I, J, K les milieux respectifs des segments [BC], [CA], [AB]. On note G le point d'intersection des médianes (BJ) et (CK) et D le symétrique de A par rapport à G.

a. Montrer que le quadrilatère BDCG est un parallélogramme.

b. En déduire que G est situé sur (AI) et préciser la position de G sur chaque médiane.

c. Montrer que pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right)$.

2. Soit respectivement O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et soit H le point du plan défini par $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

a. Montrer que (AH) est la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

b. Que représente le point H pour le triangle ABC ?

3. Montrer que les points O, H et G sont alignés.

Exercice 3 Alignement et parallélisme en géométrie analytique

Se placer dans un repère permet de résoudre certains exercices de géométrie en :

- traduisant un alignement ou un parallélisme en termes de colinéarité de vecteurs ;
- utilisant le déterminant de deux vecteurs ;
- traduisant sur ses coordonnées l'appartenance d'un point à une droite.

Le repère peut alors être donné dès le départ ou introduit « judicieusement » pour travailler avec des coordonnées simples à déterminer.

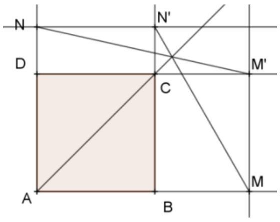
Soit OABC un rectangle de centre I et soit D et E les milieux respectifs de [OA] et [OC]. On considère deux points M et N situés respectivement sur les droites (ID) et (IE).
Montrer que si les points O, M et N sont alignés alors les droites (AM) et (CN) sont parallèles.
On peut se placer pour cela dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ dans lequel les coordonnées du point A sont $(a,0)$ et celles du point C sont $(0,c)$.

Exercice 4 Équations de droites
1. Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère le point $\mathrm{A}(1,3)$.
Déterminer la nature du triangle OAB où B est un point de la droite d'équation $x+y=0$ et où la médiane issue de O dans le triangle OAB est la droite d'équation $2x+y=0$.
2. Deux points distincts O et A du plan étant donnés et deux droites distinctes D_1 et D_2 passant par O étant données, est-il toujours possible de trouver un point B tel que B appartienne à D_1 et que D_2 soit la médiane issue de O dans le triangle OAB ? Si B existe, à quelle condition nécessaire et suffisante portant sur les droites D_1 et D_2, le triangle OAB est-il rectangle en A ?

Exercice 5 Famille de droites
En géométrie analytique, il est indispensable de savoir :
- traduire sur une équation de droite les éléments caractéristiques d'une droite (vecteur directeur, coefficient directeur, appartenance d'un point …) ;
- trouver à partir d'une équation de droite ces mêmes éléments caractéristiques.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Pour tout réel m, on considère l'ensemble D_m des points $M(x,y)$ tels que : $(m-1)x-2my+2m+1=0$.
1. Vérifier que pour tout réel m, D_m est une droite.
2. Pour quelle valeur de m, la droite D_m est-elle parallèle à l'axe des abscisses ? à l'axe des ordonnées ?
3. Montrer que toutes les droites D_m passe par un même point I dont on donnera les coordonnées.
4. Pour quelle valeur de m la droite D_m a 1 comme coefficient directeur ? A-t-on pour tout réel p une droite D_m de coefficient directeur p ?
5. Soit $A(2,-1)$ et $B(-2,5)$. Pour quelle valeur de m la droite D_m a-t-elle même ordonnée à l'origine que la droite (AB) ?

Exercice 6 Droites concourantes
Deux droites du plan sont parallèles ou sécantes. Lorsque trois droites ont un point commun, on dit qu'elles sont *concourantes* (ce terme a été utilisé dans un exercice précédent).



On considère un carré ABCD de côté 1, et le repère d'origine A et d'axes (AB) et (AD) (avec l'orientation nécessaire). Les points M et N ont pour couples de coordonnées $(a,0)$ et $(0,b)$ respectivement. Les points M' et N' sont les points de couples de coordonnées $(a,1)$ et $(1,b)$ respectivement.
1. À quelle condition (sur a et b) les droites (MN') et (NM') sont-elles parallèles ?
2. Montrer que, si cette condition n'est pas réalisée, les droites (MN'), (NM') et (AC) sont concourantes.

Exercice 7 Algorithme de Babylone
On rappelle (vu dans la fiche 1) que pour comparer deux nombres, on étudie le signe de la différence et que pour tous nombres positifs a et b, $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$.
Le nombre $\sqrt{2}$ est un irrationnel mais des Babyloniens (vers 1800-1500 avant J.C.) connaissaient un procédé d'approximation de ce nombre par des rationnels.

La tablette Ybc 7289 qui donne les premières décimales de $\sqrt{2}$

1. Montrer que, pour tout réel a strictement positif, le nombre $\sqrt{2}$ est compris entre a et $\frac{2}{a}$ et que la moyenne arithmétique $\frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{a}\right)$ de ces nombres est supérieure à $\sqrt{2}$.
2. En déduire un procédé d'approximation de $\sqrt{2}$.
3. En partant de $a=2$, déterminer les cinq premiers encadrements de $\sqrt{2}$ par des rationnels et l'amplitude du dernier encadrement.