Pépinière académique de mathématiques

Année 2022-2023 **Stage « filé »**

Classe terminale **Fiche numéro 2**

Parution lundi 5 décembre **Retour attendu pour le mardi 3 janvier**

Exercice 1 – Recherche d'extremum

Propriété : soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a,b]$ et $x_0 \in]a,b[$. La fonction f admet un extremum en x_0 si et seulement si sa dérivée s'annule **en changeant de signe** en x_0.

Soit$(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ un repère orthonormé du plan. On définit la fonction f du plan dans l'ensemble des nombres réels, associant à tout point M de coordonnées $(x\,,y)$ dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, le nombre réel $f(M)=x^4+y^4$.
Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 1. On se propose de déterminer les valeurs extrémales de la fonction f sur le cercle (C) et dans le disque fermé D délimité par (C).

1. Montrer que pour tout point M de coordonnées $(x\,,y)$ appartenant au cercle (C), $f(M)=2x^4-2x^2+1$.
2. En déduire les valeurs extrémales de f sur le cercle (C) et les points en lesquels ces extremums sont atteints.
3. Déterminer les valeurs extrémales de f sur le disque fermé D.

Exercice 2 – Suites croissantes majorées.

Définition : On dit qu'une suite (u_n) est majorée si et seulement si il existe un nombre réel M tel que pour tout entier naturel n, $u_n \leq M$.
Théorème : Toute suite croissante et majorée est convergente.

Soit une suite (u_n) dont les termes sont positifs ou nuls, majorée par un nombre réel positif M.
Pour tout entier naturel n, on définit $S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{u_k}{2^k}$.

1. Montrer que la suite (S_n) est croissante.
2. Montrer que $\forall n\in\mathbf{N}, S_n \leq M\times\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}$.
3. Démontrer que la suite (S_n) est majorée.
4. En déduire la convergence de la suite (S_n).
5. On considère la suite (u_n) définie par : pour tout entier naturel n, $u_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$.
   a. Vérifier que pour tout entier naturel n, $0\leq u_n\leq 1$.
   b. En déduire que la suite (S_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3 – Une équation fonctionnelle pour définir le logarithme népérien

La fonction logarithme népérien a été définie en classe comme fonction réciproque de la fonction exponentielle et elle a pour dérivée la fonction inverse.
On sait que pour tous nombres strictement positifs a et b, $\ln(ab)=\ln a+\ln b$ et $\ln e=1$.
On montre que ces deux propriétés caractérisent en fait la fonction logarithme népérien, c'est-à-dire la fonction logarithme népérien vérifie cette propriété et, réciproquement, si une fonction vérifie ces deux propriétés, alors cette fonction est la fonction logarithme népérien.

On cherche toutes les fonctions f dérivables sur $]0,+\infty[$ et telles que pour tous nombres réels $a>0$ et $b>0$:

$$(1)\quad f(ab)=f(a)+f(b).$$

1. Calculer $f(1)$.
2. Pour tout nombre réel $a>0$, on considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=f(ax)-f(x)$ où f est une fonction dérivable vérifiant (1). Que peut-on dire des variations de la fonction g ?
3. Montrer que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et exprimer $g'(x)$ à l'aide de la fonction dérivée de la fonction f.
4. Si on pose $f'(1)=k$, montrer que pour tout nombre réel $x>0$, $f(x)=k\ln x$.
5. Conclure sur la caractérisation de la fonction logarithme népérien.

Exercice 4 – Propriétés des combinaisons

Propriétés :

(1) pour tous entiers k et n tels que $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;

(2) pour tous entiers k et n tels que $0 < k \leq n-1$, $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$.

(3) pour tout entier n, pour tous réels a et b, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Il y a plusieurs façons de démontrer ces propriétés (raisonnement par récurrence, dénombrement dans des tirages de boules ou des chemins…). Ces méthodes peuvent être reprises pour démontrer d'autres propriétés des combinaisons.

On veut montrer que pour tout entier n,

(i) $\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} = 2^n$ (ii) $\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ (iii) $\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

a. Démontrer par récurrence la relation (i) en s'appuyant sur les propriétés (1) et (2).

b. Démontrer la relation (ii) en s'appuyant sur la propriété (3).

c. Démontrer la relation (iii) en dénombrant des tirages de boules.

d. En considérant la dérivée de la fonction $f : x \mapsto (1+x)^n$, démontrer que pour tout entier n,

$$\sum_{k=0}^{k=n} k \binom{n}{k} = n\, 2^{n-1}.$$

Exercice 5 – Suite de Fibonacci et « nombre d'or »

Dans l'étude des suites, on se ramène souvent à des suites connues comme les suites arithmétiques ou les suites géométriques. C'est le cas pour les suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, c'est-à-dire une relation du type $u_{n+2} = au_n + bu_{n+1}$.

Partie A

On considère la suite (u_n) définie sur **N** par $u_0 = u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$ (1).
Cette suite est appelée suite de Fibonacci (mathématicien Léonard de Pise dit Fibonacci du 12e siècle).

1. Calculer les 10 premiers termes de la suite.
2. On cherche les suites géométriques vérifiant la relation (1). Si on note q la raison d'une telle suite, déterminer les valeurs possibles de q. On note q_1 et q_2 les deux valeurs possibles.

On admet que pour toute suite (u_n) vérifiant la relation (1), il existe deux réels a et b tels que pour tout entier naturel n, $u_n = aq_1^n + bq_2^n$

3. Déterminer les réels a et b pour que la suite (u_n) soit la suite de Fibonacci. Donner l'expression de u_n en fonction de n.

Partie B

On considère la suite (v_n) définie sur **N** par, pour tout entier naturel n, $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $v_n = \frac{-q_1^{n+2}+q_2^{n+2}}{-q_1^{n+1}+q_2^{n+1}}$ et en déduire que la suite (v_n) converge vers un nombre Φ qu'on déterminera.

Ce nombre Φ est appelé « nombre d'or »

2. Montrer que le nombre Φ vérifie les relations suivantes :

(i) $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$ (ii) pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{\Phi^{n+1} - (-1)^{n+1}\Phi^{-n-1}}{\sqrt{5}}$

3. Expliquer les relations : $\Phi = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}}$ et $\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}$

Exercice 6 – Le cercle des neuf points (ou « cercle d'Euler », mais Euler en a tant fait…)

En géométrie vectorielle, on rappelle que :

- la colinéarité de deux vecteurs permet de démontrer un alignement de points ;
- la nullité d'un produit scalaire permet de démontrer une orthogonalité ;
- le centre de gravité d'un triangle ABC (point de concours des médianes) est le point G tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Soit ABC un triangle. On appelle :
- A', B', C' les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB] ;
- D, E et F les pieds des hauteurs du triangle ABC issues respectivement de A, B et C ;
- G le centre de gravité du triangle ABC.

1. On note O le centre du cercle $\mathcal{C}_1$ circonscrit au triangle ABC et H le point défini par $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}$. Montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC et que $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = 3\,\overrightarrow{\mathrm{OG}}$. Qu'en déduit-on pour les points O, G et H ?
2. On note I, M, N et P les milieux respectifs des segments [OH], [HA], [HB] et [HC]. On appelle $\mathcal{C}_2$ le cercle de centre I de rayon la moitié du rayon du cercle $\mathcal{C}_1$.
   Démontrer que $\overrightarrow{\mathrm{IM}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} = -\overrightarrow{\mathrm{IA'}}$. En déduire que le segment [MA'] est un diamètre du cercle $\mathcal{C}_2$.
3. Montrer que le point D appartient au cercle $\mathcal{C}_2$.
4. Donner neuf points situés sur le cercle $\mathcal{C}_2$ (il s'agit naturellement de nommer neuf points de la figure définis sans référence au cercle…)

Exercice 7 – Fonction vectorielle de Leibniz

L'objectif de cet exercice est d'étudier une fonction vectorielle, dite de Leibniz, et la notion de barycentre ainsi que ses applications à la géométrie (points alignés, droites concourantes,).

Définition : Soit n points du plan notés $A_1, A_2, \dots, A_n$ et n réels notés $a_1, a_2, \dots, a_n$. On appelle *fonction vectorielle de Leibniz* la fonction $\vec{f}$ qui à tout point M du plan associe le vecteur :

$$\overrightarrow{f(M)} = a_1\overrightarrow{MA_1} + a_2\overrightarrow{MA_2} + \ \dots + a_n\overrightarrow{MA_n} = \sum_{i=1}^{i=n} a_i\overrightarrow{MA_i}$$

Partie A – Cas général

1. a. On pose $m = \sum_{i=1}^{i=n} a_i$. Montrer que si O est un point fixé du plan alors, pour tout point M du plan, $\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{f(O)} + m\overrightarrow{MO}$.
   b. Démontrer que si $\sum_{i=1}^{i=n} a_i \neq 0$, alors il existe un unique point G du plan tel que $\overrightarrow{f(G)} = \vec{0}$.

Ce point G est alors appelé le barycentre des points pondérés $(A_1, a_1), (A_2, a_2), \dots, (A_n, a_n)$ et on appelle masse du système de ces n points pondérés la somme $m = \sum_{i=1}^{i=n} a_i$ de leurs coefficients.

2. a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{A_1G}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{A_1A_i}$ pour $2 \leq i \leq n$.
   b. Soit ABC un triangle, construire, s'ils existent, le barycentre G_1 des points pondérés $(A, 1), (B, 2)$ et le barycentre G_2 des points pondérés $(A, 2), (B, 1), (C, 3)$.
3. Montrer que si λ est un réel non nul et si G est le barycentre des points pondérés $(A_1, a_1), (A_2, a_2), \dots,$ (A_n, a_n) alors G est aussi le barycentre des points pondérés $(A_1, \lambda a_1), (A_2, \lambda a_2), \dots, (A_n, \lambda a_n)$.

On admet la propriété dite *d'associativité du barycentre* : le barycentre de n points pondérés ne change pas lorsqu'on remplace k d'entre eux, dont la somme m' de leurs coefficients est non nulle, par leur barycentre A affecté du coefficient m'.
Grâce à des regroupements judicieux de points pondérés, cette propriété permet de démontrer que des droites sont concourantes ou que des points sont alignés.

Partie B – Cas particuliers

1. Soit a et b deux réels tels $a + b \neq 0$. Montrer que si G est barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b), alors G est aligné avec A et B.
2. Trouver deux réels a et b tels que le milieu I d'un segment [AB] soit le barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b). Les réels a et b sont-ils uniques ?
3. Soit ABC un triangle. Soit I, J et K les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$ et soit G le barycentre des points pondérés $(A, 1), (B, 1), (C, 1)$. En utilisant la propriété d'associativité du barycentre, retrouver le fait que les médianes du triangle ABC sont concourantes.
4. Soit $ABCD$ un quadrilatère. On considère les points H et K définis par $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ et les points I et J, milieux respectifs de $[AD]$ et $[BC]$. Montrer que le milieu G de $[HK]$ est aligné avec les points I et J.