ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté Égalité Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Année 2025-2026 — **Stage « filé »**

Classe de première — **Fiche numéro 2**

Parution lundi 24 novembre — **Retour attendu pour le lundi 15 décembre**

Dans cette fiche, chaque énoncé d'exercice est précédé de quelques rappels constituant des outils pour traiter l'exercice.

Exercice 1 – Un peu d'arithmétique

Définition 1 : on dit qu'un nombre entier m est un multiple d'un entier p s'il existe un entier k tel que $m = kp$.

On peut dire aussi que l'entier p divise m, mais attention à ne pas écrire de *quotient*, car on sortirait de l'arithmétique.
Définition 2 : on dit qu'un entier naturel est premier lorsqu'il possède exactement deux diviseurs distincts : 1 et lui-même.
Définition 3 : on dit que deux entiers naturels sont premiers entre eux lorsque qu'ils ne possèdent que 1 comme diviseur commun dans l'ensemble des entiers naturels.

1. Soit n un entier naturel.
  a. Montrer que si n est un entier naturel alors, l'un des nombres $n-1, n, n+1$ est un multiple de 3.
  b. En déduire que si n est un nombre premier autre que 2 et 3 alors l'affirmation $P(n)$: « $n^2 - 1$ est un multiple de 12 » est vraie.
  c. Donner un exemple de nombre entier non premier n pour lequel $P(n)$ est vraie et un exemple pour lequel $P(n)$ est fausse.

2. Déterminer tous les entiers naturels n qui soient des carrés parfaits et tels qu'il existe un entier naturel p premier tel que $n = 7p + 4$.

Exercice 2 – Polynômes et nombres premiers

Définition : on dit qu'un entier naturel est premier lorsqu'il possède exactement deux diviseurs (positifs) distincts : 1 et lui-même.

1. Résoudre l'équation $X^2 - 11X + 30 = 0$.

2. Soit le polynôme $P(x) = x^4 - 11x^2 + 30$.
  a. Montrer qu'il existe deux polynômes $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ de degré 2 tels que
  pour tout nombre réel x, $P(x) = \mathcal{Q}(x)\mathcal{R}(x)$.
  b. Résoudre les équations $\mathcal{Q}(x) = 1, \mathcal{Q}(x) = -1, \mathcal{R}(x) = 1$ et $\mathcal{R}(x) = -1$.

3. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 3$, l'entier $n^4 - 11n^2 + 30$ n'est pas un nombre premier.

Exercice 3 – Parabole et lieu géométrique

Propriété : les abscisses des points d'intersection des courbes représentatives, dans un repère du plan, de deux fonctions f et g sont les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.
Définition : on dit qu'un nombre décrit un ensemble lorsqu'il prend toutes les valeurs de cet ensemble et on dit qu'un point décrit un ensemble lorsque qu'il prend toutes les positions des points de cet ensemble.

Soit, dans le plan muni d'un repère, la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2 - 4$ et $\mathcal{D}_m$ la droite d'équation $y = 2x + m$.

1. Tracer la parabole $\mathcal{P}$ et les droites $\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_{-3}, \mathcal{D}_4$.

2. Pour quelles valeurs de m la droite $\mathcal{D}_m$ et la parabole $\mathcal{P}$ sont-elles sécantes ? On note $\mathcal{E}$ l'ensemble de ces valeurs.

3. Dans ce cas, exprimer en fonction de m l'abscisse du milieu I_m du segment joignant les points d'intersection de la parabole et de la droite.

4. Que peut-on dire des points I_m lorsque m décrit l'ensemble $\mathcal{E}$?

Exercice 4 – Calculs sur les racines d'un polynôme

Définition : Soit n un entier naturel, on appelle fonction polynôme (ou polynôme) de degré n, une fonction P pour laquelle il existe des réels $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ tels que $a_n \neq 0$ et pour tout réel x, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.
Les réels $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ sont appelés les coefficients de P.
Propriété : soit P et Q deux fonctions polynômes. P et Q sont égales (c'est-à-dire pour tout réel x, $P(x) = Q(x)$) si et seulement si P et Q ont même degré et les mêmes coefficients.

Soit P le polynôme défini sur **R** par $P(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 1$. On suppose que P admet trois racines a, b, c.

1. Montrer que pour tous réels x, y et z, $x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz$.
2. Que vaut $a^3 + b^3 + c^3$?

Exercice 5 – Algorithme de Babylone

On rappelle (vu dans la fiche 1) que pour comparer deux nombres, on peut étudier le signe de la différence et que pour tous nombres positifs a et b, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Le nombre $\sqrt{2}$ est un irrationnel mais des Babyloniens (vers 1800-1500 avant J.C.) connaissaient un procédé d'approximation de ce nombre par des rationnels.

La tablette Ybc 7289 qui donne les premières décimales de $\sqrt{2}$

1. Montrer que, pour tout réel a strictement positif, le nombre $\sqrt{2}$ est compris entre a et $\frac{2}{a}$ et que la moyenne arithmétique $\frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$ de ces nombres est supérieure à $\sqrt{2}$.
2. En déduire un procédé d'approximation de $\sqrt{2}$.
3. En partant de $a = 2$, déterminer les cinq premiers encadrements de $\sqrt{2}$ par des rationnels et l'amplitude du dernier encadrement.

Exercice 6 – Quadrilatère complet

Le calcul vectoriel est un outil fort utile pour les démonstrations en géométrie :

- caractérisation du milieu I d'un segment [AB] par l'une des égalités vectorielles suivantes : $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$ ou $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$
- si I est le milieu du segment [AB] alors pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.
- parallélisme de droites ou alignement de points par la colinéarité de deux vecteurs
- parallélogramme par l'égalité de deux vecteurs
- relation de Chasles…

Dans tout exercice de géométrie, on fait une figure.

Soit ABC un triangle. On considère les points D, E, F définis par :

$$\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \text{ D est le milieu du segment [EC] et } \overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BC}.$$

1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. En déduire que les points A, D et F sont alignés.
2. Soit I, J, K les milieux respectifs des segments [AC], [BD], [EF]. Montrer que les points I, J, K sont alignés.

Exercice 7 – Alignement, parallélisme en géométrie analytique

Se placer dans un repère permet de résoudre certains exercices de géométrie en :

- traduisant un alignement ou un parallélisme en termes de colinéarité de vecteurs ;
- utilisant le déterminant de deux vecteurs ;
- traduisant sur ses coordonnées l'appartenance d'un point à une droite.

Le repère peut alors être donné dès le départ ou introduit « judicieusement » pour travailler avec des coordonnées simples à déterminer.

Soit ABC un triangle non aplati. Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments [AB], [BC] et [CA].
On considère un point D et on note E et F les images respectives du point D par les translations de vecteurs $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{KB}$.
On se place dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

1. Déterminer la nature du quadrilatère EAJF.
2. Montrer que si G est le milieu du segment [EF] alors les droites (DG) et (BC) sont parallèles.