Pépinière académique de mathématiques

Année 2024-2025 **Stage « filé »**

Classe de première **Fiche numéro 2**

Parution lundi 25 novembre **Retour attendu pour le lundi 16 décembre**

Dans cette fiche, chaque énoncé d'exercice est précédé de quelques rappels constituant des outils pour traiter l'exercice.

Exercice 1 – Un peu d'arithmétique

Définition 1 : on dit qu'un nombre entier m est un multiple d'un entier p s'il existe un entier k tel que $m = kp$.

On peut dire aussi que l'entier p divise m, mais attention à ne pas écrire de *quotient*, car on sortirait de l'arithmétique.
Définition 2 : on dit que deux entiers naturels sont premiers entre eux lorsqu'ils ne possèdent que 1 comme diviseur commun dans l'ensemble des entiers naturels.

1. **a.** La somme des carrés de 5 entiers positifs consécutifs est égale à 1815. Quel est le plus grand de ces entiers ?
   b. Démontrer que la somme des carrés de 5 entiers consécutifs quelconques est toujours divisible par 5.
2. **a.** Démontrer que si n et m sont deux entiers naturels multiples d'un entier naturel d alors $m + n$ et $m - n$ sont des multiples de d.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, n et $n + 1$ sont premiers entre eux
3. Montrer que, pour tout entier $k \geq 2$, la somme de k entiers impairs consécutifs ne peut être un nombre premier.
   (On pourra utiliser la propriété : pour tout entier naturel non nul k, $1 + 2 + \cdots + n = \frac{k(k+1)}{2}$)

1. **a.** Les cinq entiers consécutifs peuvent s'écrire $n - 2, n - 1, n, n + 1, n + 2$ et on cherche n tel que $(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 1815$ c'est-à-dire $5n^2 + 0n + 4 + 1 + 1 + 4 = 1\,815$ soit $5n^2 = 1\,805$ soit $n^2 = 361$ soit $n = 19$. Le plus grand des entiers considérés est $n + 2 = 21$.
   b. Toute somme de ce type peut s'écrire $(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2$ soit $5n^2 + 10$ qui est bien un multiple de 5.
2. **a.** Soit n et m deux entiers naturels multiples de d. Cela signifie qu'il existe deux entiers k et l tels que $n = kd$ et $m = ld$. Alors $m + n = (k + l)d$ où $k + l$ est un entier. Donc $m + n$ est un multiple de d.Même raisonnement pour $m - n$.
   b. Si d est un entier naturel diviseur commun à n et $n + 1$, c'est-à-dire n et $n + 1$ sont des multiples de d, alors $(n + 1) - n$ est un multiple de d soit 1 est un multiple de d. Cela signifie que $d = 1$ c'est-à-dire n et $n + 1$ sont premiers entre eux.
3. Un entier naturel n est impair lorsqu'il existe un entier l tel que $n = 2l + 1$. On peut donc écrire la somme de k entiers impairs consécutifs $S = (2l + 1) + (2(l + 1) + 1) + (2(l + 2) + 1) + \cdots + (2(l + k - 1) + 1)$
   Soit $S = (2l + 1) + (2l + 1 + 2) + (2l + 1 + 4) + \cdots + (2l + 1 + 2(k - 1))$
   Soit $S = k(2l + 1) + 2(1 + 2 + \cdots + (k - 1)) = k(2l + 1) + 2 \times \frac{k(k-1)}{2} = k(2l + 1 + k - 1) = k(2l + k)$.
   Comme $2l + k$ est un entier, on en déduit que S est un multiple de k.

Exercice 2 – Polynômes composés

Définition : Soit n un entier naturel, on appelle fonction polynôme (ou polynôme) de degré n, une fonction P pour laquelle il existe des réels $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ tels que $a_n \neq 0$ et pour tout réel x, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.
Les réels $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ sont appelés les coefficients de P.
Propriété : soit P et Q deux fonctions polynômes. P et Q sont égales (c'est-à-dire pour tout réel x, $P(x) = Q(x)$) si et seulement si P et Q ont même degré et les mêmes coefficients.

Soit P un polynôme, on considère le polynôme Q défini par, pour tout réel x, $Q(x) = P(P(x))$.
Déterminer les réels a, b et c tels que le polynôme Q défini par, pour tout réel x, $Q(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 13$ soit ainsi associé à un polynôme P à coefficients entiers.

On remarque déjà que le polynôme P ne peut qu'être de degré 2 pour que Q soit de degré 4.
On peut donc poser $P(x) = Ax^2 + Bx + C$.
Alors $Q(x) = P(Ax^2 + Bx + C) = A(Ax^2 + Bx + C)^2 + B(Ax^2 + Bx + C) + C$

Soit $Q(x) = A((Ax^2)^2 + (Bx)^2 + C^2 + 2Ax^2Bx + 2Ax^2C + 2BxC) + ABx^2 + B^2x + BC + C$
Soit $Q(x) = A^3x^4 + 2A^2Bx^3 + (AB^2 + 2A^2C + AB)x^2 + (2ABC + B^2)x + (AC^2 + BC + C)$

On aura donc, pour tout réel x, $Q(x) = P\big(P(x)\big)$ si et seulement si : $\begin{cases} A^3 = 1 \\ 2A^2B = a \\ AB^2 + 2A^2C + AB = b \\ 2ABC + B^2 = c \\ AC^2 + BC + C = 13 \end{cases}$

La première équation équivaut à $A = 1$. Le système précédent équivaut donc à $\begin{cases} A = 1 \\ 2B = a \\ B^2 + 2C + B = b \\ 2BC + B^2 = c \\ C(C + B + 1) = 13 \end{cases}$

On veut que P soit à coefficients entiers. Comme 13 est un nombre premier, il n'a pour diviseurs que $-13, -1, 1, 13$.
On a donc quatre choix possibles pour les nombres a, b, c :

- $C = -1$ et $(C + B + 1) = -13$ soit $B = -13$. Dans ce cas $a = -26$, $b = 154$ et $c = 195$
- $C = -13$ et $(C + B + 1) = -1$ soit $B = 11$. Dans ce cas $a = 22$, $b = 106$ et $c = -165$
- $C = 1$ et $(C + B + 1) = 13$ soit $B = 11$. Dans ce cas $a = 22$, $b = 134$ et $c = 143$
- $C = 13$ et $(C + B + 1) = 1$ soit $B = -13$. Dans ce cas $a = -26$, $b = 182$ et $c = -169$

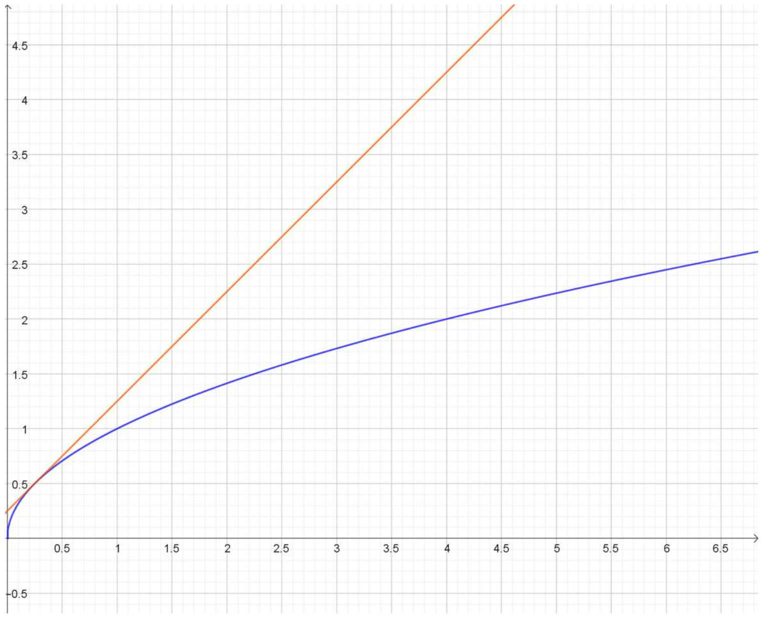
Exercice 3 – Inégalités et racines carrées

Définition : on dit qu'un nombre a est inférieur ou égal à un nombre b lorsque $b - a \geq 0$.
Cette définition conduit à une méthode pratique pour comparer deux nombres.
Propriété : Soit a et b deux réels positifs, $a \leq b$ si et seulement si $a^2 \leq b^2$.

1. Soit a et b deux nombres réels strictement positifs.
   - **a.** Montrer que $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ et que $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
   - **b.** Montrer que $\frac{2}{\sqrt{ab}} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.
   - **c.** Comparer $\frac{a+b}{2}$ et $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.
2. **a.** Représenter graphiquement les deux fonctions f et g définies par, pour tout réel x de $[0, +\infty[$:
   $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x + \frac{1}{4}$ et conjecturer le nombre de points communs aux deux courbes.
   b. Vérifier cette conjecture algébriquement.

1. **a.** Pour tous réels a et b strictement positifs, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b} = \frac{1}{ab(a+b)}(b(a+b) + a(a+b) - ab)$
   soit , $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b} = \frac{1}{ab(a+b)}(ab + b^2 + a^2 + ab - ab) = \frac{1}{ab(a+b)}(ab + b^2 + a^2)$.
   Comme a et b sont strictement positifs, on peut affirmer que $ab + b^2 + a^2 > 0$ et $ab(a+b) > 0$
   d'où $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.
   Comme a et b sont strictement positifs, $\sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ existent et sont aussi strictement positifs. Les comparer revient donc à comparer leurs carrés.
   $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 - \left(\sqrt{a+b}\right)^2 = a + b + 2\sqrt{ab} - (a+b) = 2\sqrt{ab}$ qui est un nombre positif,
   d'où $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
   b. Comme $\frac{2}{\sqrt{ab}}$ et $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ sont positifs (puisque a et b sont strictement positifs), les comparer revient à comparer leurs carrés.
   $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{ab}}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{ab} - \frac{4}{ab} = \frac{1}{a^2b^2}(b^2 + a^2 - 2ab) = \frac{1}{a^2b^2}(a-b)^2$.
   Comme les carrés sont des nombres positifs ou nuls, on en déduit que $\frac{2}{\sqrt{ab}} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.
   c. Comme $\frac{a+b}{2}$ et $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ sont des réels positifs, les comparer revient à comparer leurs carrés.
   $\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^2 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{a^2+b^2+2ab}{4} = \frac{2a^2+2b^2-a^2-b^2-2ab}{4} = \frac{a^2+b^2-2ab}{4} = \frac{(a-b)^2}{4}$.
   Comme un carré est un nombre positif ou nul, on en déduit que $\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^2 \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ d'où $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$.

2. **a.** On peut conjecturer que les deux courbes admettent un unique point commun, de coordonnées $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.



b. Pour étudier la position relative des deux courbes, on compare sur l'intervalle $[0, +\infty[$ les deux nombres $\sqrt{x}$ et $x + \frac{1}{4}$. Ces deux nombres étant positifs, cela revient à comparer leurs carrés.

$\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} - x = \frac{1}{16}(16x^2 - 8x + 1) = \frac{1}{16}(4x - 1)^2$

Les deux courbes ont donc bien un unique point commun, ce point ayant pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

Exercice 4 – Médianes concourantes et droite d'Euler

Le calcul vectoriel est un outil fort utile pour les démonstrations en géométrie :

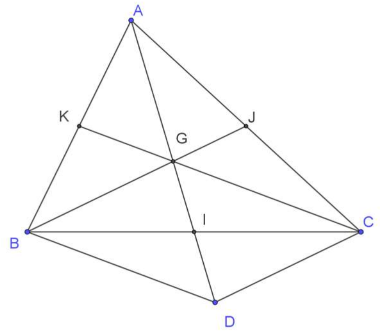
- caractérisation du milieu I d'un segment $[\mathrm{AB}]$ par l'une des égalités vectorielles suivantes :
$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ ou $\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \overrightarrow{\mathrm{IB}}$
- si I est le milieu du segment $[\mathrm{AB}]$ alors pour tout point M du plan, $\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} = 2\overrightarrow{\mathrm{MI}}$.
- parallélisme de droites ou alignement de points par la colinéarité de deux vecteurs
- parallélogramme par l'égalité de deux vecteurs
- relation de Chasles…

Théorème : les médianes d'un triangle sont concourantes. Leur point de concours est appelé centre de gravité du triangle et il est situé au tiers de chaque médiane, en partant de la base.

1. Démonstration du théorème : soit ABC un triangle et soit $\mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{K}$ les milieux respectifs des segments $[\mathrm{BC}]$, $[\mathrm{CA}]$, $[\mathrm{AB}]$. On note G le point d'intersection des médianes (BJ) et (CK) et D le symétrique de A par rapport à G.
   a. Montrer que le quadrilatère BDCG est un parallélogramme.
   b. En déduire que G est situé sur (AI) et préciser la position de G sur chaque médiane.
   c. Montrer que pour tout point M du plan, $\overrightarrow{\mathrm{MG}} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}}\right)$.
2. Soit respectivement O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et H le point du plan défini par $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}$.
   a. Montrer que (AH) est la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
   b. Que représente le point H pour le triangle ABC ?
3. Montrer que les points O, H et G sont alignés.

1. a. $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}$. Or G et J sont les milieux respectifs de [DA] et [CA] d'où $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AJ} = 2(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AJ}) = 2\overrightarrow{GJ}$.

On en déduit que les droites (DC) et (GJ) sont parallèles. Comme les points B, G et J sont alignés, (DC) et (BG) sont parallèles.
On démontrerait de même que les droites (BD) et (CG) sont parallèles.
Le quadrilatère BDCG est donc un parallélogramme.



b. Les diagonales du parallélogramme BDCG se coupent en leur milieu.
Le milieu I du segment [BC] est donc aussi le milieu du segment [GD]. En particulier le point I appartient à la droite (GD) qui est aussi la droite (AG), ce qui implique que les points A, G et I sont alignés.

Les trois médianes sont donc bien concourantes en G et $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{IG} + 2\overrightarrow{IG} = 3\overrightarrow{IG}$ car I est le milieu de [GD] et G est le milieu de [AD]. On en tire la relation $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$, ce qui précise la position du point G sur la médiane [AI]. La position de G sur les autres médianes est analogue (le raisonnement fait ne fait jouer aucun rôle particulier aux deux médianes considérées).

c. Pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$
Or $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI} = -\overrightarrow{GA}$ donc $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ et donc $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

2. a. L'égalité $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ s'écrit aussi $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OI}$ car I est le milieu de [BC].
On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{OI}$ sont colinéaires et donc que les droites (AH) et (OI) sont parallèles. Or (OI) est la médiatrice de [BC] par définition du point O donc (AH) est perpendiculaire à (BC). La droite (AH) est donc la hauteur issue du point A dans le triangle ABC.

b. On démontrerait de même que (BH) et (CH) sont aussi des hauteurs. Le point H est donc l'orthocentre du triangle ABC.

3. De plus comme $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ pour tout point M, en particulier pour $M = O$ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$, on en déduit que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.
On peut donc affirmer que les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OG}$ sont colinéaires et donc que les points O, H et G sont alignés.
Remarque : on appelle droite d'Euler, la droite contenant les points O, H et G.

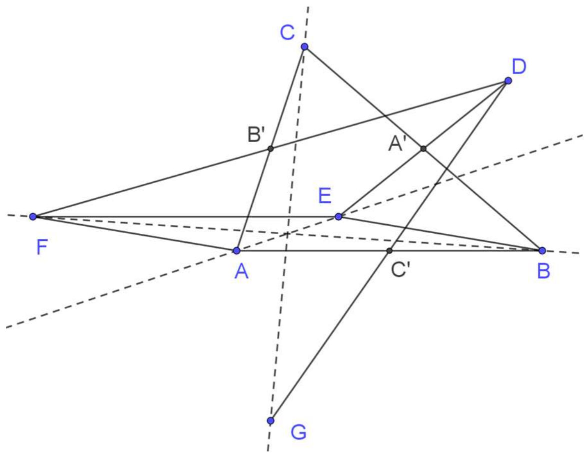
Exercice 5 – Alignement, parallélisme en géométrie analytique

Se placer dans un repère permet de résoudre certains exercices de géométrie en :
- traduisant un alignement ou un parallélisme en termes de colinéarité de vecteurs ;
- utilisant le déterminant de deux vecteurs ;
- traduisant sur ses coordonnées l'appartenance d'un point à une droite.

Le repère peut alors être donné dès le départ ou introduit « judicieusement » pour travailler avec des coordonnées simples à déterminer.

Soit ABC un triangle et soit A', B', C' les milieux respectifs des segments $[BC], [CA], [AB]$. On considère un point D distinct des points A, B, C et on note E et F les symétriques de D par rapport respectivement aux points A' et B'.
On se place dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

1. Démontrer que $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BE}$.
2. Démontrer que les droites (AF) et (BE) sont confondues si et seulement si les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
3. On note G le symétrique du point D par rapport au point C'.
   a. À quelles conditions les droites $(AE), (BF)$ et (CG) sont-elles deux à deux distinctes.
   b. Démontrer que ces droites sont alors concourantes.



1. Dans le repère choisi, on a $\mathrm{A}(0,0), \mathrm{B}(1,0), \mathrm{C}(0,1)$.
On en déduit les coordonnées des milieux A', B', C' :
$\mathrm{A}'\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \mathrm{B}'\left(0,\frac{1}{2}\right), \mathrm{C}'\left(\frac{1}{2},0\right)$.
Le point E est le symétrique de D par rapport à A' c'est-à-dire
$\overrightarrow{\mathrm{A'E}} = \overrightarrow{\mathrm{DA'}}$ soit $\begin{cases} x_E - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - x_{\mathrm{D}} \\ y_E - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - y_{\mathrm{D}} \end{cases}$. On a donc $\mathrm{E}(1 - x_{\mathrm{D}}, 1 - y_{\mathrm{D}})$.
Le point F est le symétrique de D par rapport à B' c'est-à-dire
$\overrightarrow{\mathrm{B'F}} = \overrightarrow{\mathrm{DB'}}$ soit $\begin{cases} x_F = -x_{\mathrm{D}} \\ y_F - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - y_{\mathrm{D}} \end{cases}$. On a donc $\mathrm{F}(-x_{\mathrm{D}}, 1 - y_{\mathrm{D}})$.
On en déduit les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{BE}}\begin{pmatrix} -x_{\mathrm{D}} \\ 1 - y_{\mathrm{D}} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AF}}\begin{pmatrix} -x_{\mathrm{D}} \\ 1 - y_{\mathrm{D}} \end{pmatrix}$ ce qui permet d'affirmer qu'on a bien $\overrightarrow{\mathrm{BE}} = \overrightarrow{\mathrm{AF}}$.

2. Les droites (AF) et (BE) sont parallèles d'après la question précédente. Elles sont donc confondues si et seulement si le point B appartient à la droite (AF) ce qui signifie que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AF}}\begin{pmatrix} -x_{\mathrm{D}} \\ 1 - y_{\mathrm{D}} \end{pmatrix}$ sont colinéaires.
dét$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AF}}\right) = 1 \times (1 - y_{\mathrm{D}}) - 0 \times x_{\mathrm{D}} = 1 - y_{\mathrm{D}}$. Les droites (AF) et (BE) sont donc confondues si et seulement si $1 - y_{\mathrm{D}} = 0$. Or $y_{\mathrm{D}} = 1$ signifie que le point D est sur la parallèle à (AB) passant par C c'est-à-dire (AB) et (CD) sont parallèles.

3. **a.** On a démontré, d'après la question **2.**, que (AF) et (BE) sont strictement parallèles si et seulement si (AB) et (CD) sont sécantes.
(AE) et (BF) sont distinctes si et seulement si (AF) et (BE) sont strictement parallèles (parallélogramme AFEB non aplati donc ses diagonales sont distinctes)
On en déduit que(AB) et (CD) sont sécantes si et seulement si(AE) et (BF) sont distinctes.
On démontrerait de même :
   - que (BG) et (CF) sont strictement parallèles si et seulement si (BC) et (AD) sont sécantes
   Donc (BC) et (AD) sont sécantes si et seulement si (BF) et (CG) sont distinctes.
   - que (AG) et (CE) sont strictement parallèles si et seulement si (CA) et (BD) sont sécantes.
   Donc (AC) et (BD) sont sécantes si et seulement si (AE) et (CG) sont distinctes.

   b. Dans le cas où les droites (AE), (BF) et (CG) sont distinctes deux à deux :
   Comme $\overrightarrow{\mathrm{BE}} = \overrightarrow{\mathrm{AF}}$, le quadrilatère $ABEF$ est un parallélogramme et ses diagonales [AE] et [BF] se coupent en leur milieu qu'on note I. On démontrerait de même que $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{GF}}$ ce qui signifie que le quadrilatère $BCFG$ est un parallélogramme. Ses diagonales [CG] et [BF] ont donc même milieu. Le point I est donc le milieu commun de [AE], [BF] et [CG]. En particulier, les droites (AF), (BE) et (CG) sont concourantes.

Exercice 6 – Famille de droites

En géométrie analytique, il est indispensable de savoir :
- traduire par une équation de droite les éléments caractéristiques d'une droite (vecteur directeur, coefficient directeur, appartenance d'un point …) ;
- trouver à partir d'une équation de droite ces mêmes éléments caractéristiques.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Pour tout réel m, on considère l'ensemble D_m des points $M(x, y)$ tels que : $(m+2)x + (m-2)y - 8 = 0$.

1. Vérifier que pour tout réel m, D_m est une droite.
2. Pour quelle valeur de m, la droite D_m est-elle parallèle à l'axe des abscisses ? à l'axe des ordonnées ?
3. Montrer que toutes les droites D_m passent par un même point I dont on donnera les coordonnées.
4. Pour quelle valeur de m le nombre -3 est-il le coefficient directeur de la droite D_m ? A-t-on pour tout réel p une droite D_m de coefficient directeur p ?
4. Soit $A(-3,2)$ et $B(1,6)$. Pour quelle valeur de m la droite D_m a-t-elle même ordonnée à l'origine que la droite (AB) ?

1. D_m est une droite si et seulement si les coefficients de x et y dans l'équation (E) ne sont pas tous les deux nuls. Or $m+2=0$ équivaut à $m=-2$ mais alors $m-2\neq 0$ et $m-2=0$ équivaut à $m=2$ mais alors $m+2\neq 0$.

L'ensemble D_m est donc bien toujours une droite.

2. La droite D_m est parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si le coefficient de x dans l'équation (E) est nul soit $m+2=0$ c'est-à-dire $m=-2$. Une équation de D_{-2} est $-4y-8=0$ soit $y=-2$.

La droite D_m est parallèle à l'axe des ordonnées si et seulement si le coefficient de y dans l'équation (E) est nul soit $m-2=0$ c'est-à-dire $m=2$. Une équation de D_2 est $4x-8=0$ ou $x=2$.

3. Si le point I existe, il appartient aux droites D_{-2} et D_2. Il suffit alors de vérifier que, pour tout réel m, le couple $(2,-2)$ est solution de (E).

Or, pour tout réel m, $(m+2)\times 2+(m-2)\times(-2)-8=2m+4-2m+4-8=0$.

Toutes les droites D_m passent donc bien par le point $I(2,-2)$.

4. Si $m\neq 2$, l'équation (E) s'écrit $y=-\frac{m+2}{m-2}x+\frac{8}{m-2}$ et le coefficient directeur de la droite D_m est $p=-\frac{m+2}{m-2}$.

$p=-3$ équivaut à $m+2=3(m-2)$ soit $2m=8$ soit $m=4$

Soit p un réel, $p=-\frac{m+2}{m-2}$ équivaut, pour $m\neq 2$, à $p(m-2)=-m-2$ soit $m(p+1)=2(p-1)$. Au réel p on peut donc associer une droite D_m si et seulement si $p\neq -1$ et alors $m=\frac{2(p-1)}{p+1}$

5. Un point $M(x,y)$ du plan appartient à (AB) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+3\\y-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$ sont colinéaires c'est-à-dire leur déterminant est nul ce qui s'écrit $4(x+3)-4(y-2)=0$ soit $x-y+5=0$.

Cette équation s'écrit aussi $y=x+5$. L'ordonnée à l'origine de la droite (AB) est donc 5.

La droite D_m a donc même ordonnée à l'origine que la droite (AB) si et seulement si $\frac{8}{m-2}=5$ soit $m=\frac{18}{5}$.