ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Année 2025-2026 **Stage « filé »**

Classe de première **Fiche numéro 1**

Parution lundi 13 octobre **Retour attendu pour le lundi 10 novembre**

Dans cette fiche, chaque énoncé d'exercice est précédé de quelques rappels constituant des outils pour traiter l'exercice.

Exercice 1 – Divers types de raisonnement

En mathématiques, on énonce des *définitions* et on établit des *théorèmes*. Tout théorème énonce une vérité qui vaut pour tous les types d'objets concernés. On établit un théorème (ou une propriété) grâce à un *raisonnement* (une *démonstration*). Il existe divers types de raisonnements. Le plus souvent utilisé est le raisonnement déductif (construit à l'aide d'une suite d'implications) mais d'autres types de raisonnement peuvent parfois s'avérer plus appropriés.
L'objectif de cet exercice est de bien appréhender trois types de raisonnement : le raisonnement par contre-exemple, le raisonnement par l'absurde et le raisonnement par disjonction de cas.

1. Contre-exemple

Une affirmation mathématique qui a l'allure d'un théorème n'en est pas un si un des objets dont elle traite apporte la contradiction. On dit qu'on a affaire à un contre-exemple : un exemple d'objet mathématique (nombres, figures géométriques, fonctions…) pour lequel l'affirmation est fausse.
Remarque : un exemple ne suffit pas à prouver qu'une affirmation est vraie mais un contre-exemple suffit à prouver qu'une affirmation est fausse.

Peut-on affirmer que :
- **a.** si $x < 2$, alors $x^2 < 4$?
- **b.** deux rectangles de même périmètre ont même aire ?
- **c.** le produit de deux entiers impairs est un entier impair ?

2. Par l'absurde

Utiliser un raisonnement par l'absurde pour démontrer la véracité d'une affirmation consiste à montrer que la négation de cette affirmation est fausse. Dans le cas d'une implication, cela revient à supposer que la conclusion est fausse pour aboutir à une contradiction.
- **a.** *Principe des tiroirs* : Maxime a 100 billes de trois catégories différentes. Il veut les ranger par catégorie dans trois boites. Montrer que l'une des boites contient au moins 34 billes.
- **b.** Montrer que l'équation $3n^3 + 4n^2 - 6n = 5$ n'a pas de solution entière.

3. Par disjonction des cas

Le raisonnement par disjonction de cas est une forme de raisonnement mathématique qui consiste à décomposer la proposition que l'on cherche à démontrer en un nombre fini de cas (sous-propositions) vérifiés indépendamment, ces cas ne se chevauchant pas et couvrant à eux tous toutes les possibilités (on parle alors de *partition* des cas).

- **a.** Montrer que pour tout entier n, $n^2 + n + 8$ est un nombre pair.
- **b.** Montrer que pour tout nombre réel x, $x < \sqrt{x^2 + 1}$.

1. **a.** Non, on ne peut l'affirmer car $-3 < 2$ mais $(-3)^2 = 9$ et $9 \geq 4$.
b. Non car les rectangles de dimensions 4, 6 pour l'un et 5, 5 pour l'autre ont tous les deux pour périmètre 20 (car $2 \times (4 + 6) = 20 = 2(5 + 5)$) mais l'aire du premier rectangle est 24, celle du second est 25.
c. Oui car, si n et n' sont deux entiers impairs, alors il existe deux entiers k et k' tels que $n = 2k + 1$ et $n' = 2k' + 1$. Dans ce cas, $n \times n' = (2k + 1)(2k' + 1) = 2(2kk' + k + k') + 1 = 2K + 1$ où K est un entier. Donc $n \times n'$ est un entier impair.

2. **a.** Si chaque boite contient au plus 33 billes, les trois boites permettront de ranger au plus 99 billes et non 100. Donc l'une des boites doit contenir au moins 34 billes.

b. SI n est un entier solution de l'équation alors $n(3n^2 + 4n - 6) = 5$ et donc n doit diviser 5. Or les seuls diviseurs de 5 sont $1, -1, 5, -5$ et on vérifie qu'aucune des ces valeurs n'est solution de l'équation.

3. **a.** - Si n est pair c'est-à-dire il existe un entier k tel que $n = 2k$, alors $n^2 = 4k^2 = 2 \times 2k^2$ est aussi pair ainsi que la somme $n^2 + n + 8 = 2(2k^2 + k + 4)$.

- Si n est impair c'est-à-dire il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$ alors $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2\mathrm{k}) + 1$ est aussi Impair ainsi que la somme $n^2 + n + 8 = 2(2k^2 + 2k) + 1 + 2k + 1 + 8 = 2(2k^2 + 3k + 4 + 1)$.

b. - Si $x < 0$, alors comme une racine carrée est toujours positive ou nulle, on a bien $x < \sqrt{x^2 + 1}$.

- Si $x \geq 0$, alors comme comparer des nombres positifs ou nuls revient à comparer leurs carrés, on comparex^2et $x^2 + 1$. Or $x^2 < x^2 + 1$ donc $x < \sqrt{x^2 + 1}$.

Quelques principes de base dans le traitement d'inégalités :
(1) Pour comparer deux nombres, on peut étudier le signe de leur différence.
(2) Pour comparer deux nombres positifs, on peut comparer leurs carrés.
(3) Pour étudier le signe d'une expression, on peut l'écrire sous forme de produit ou de quotient.

Exercice 2 – Inégalités en cascades

1. Démontrer que pour tous nombres réels a et b, $a^2 + b^2 \geq 2ab$ et $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$.
2. On suppose que $a^2 + b^2 = 1$. Démontrer que $-\frac{1}{2} \leq ab \leq \frac{1}{2}$.
3. Démontrer que pour tous nombres réels a et b strictement positifs, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

1. $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$ et un carré est toujours positif ou nul donc $a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$ soit $a^2 + b^2 \geq 2ab$. $(a + b)^2 - 2(a^2 + b^2) = a^2 + b^2 + 2ab - 2(a^2 + b^2) = -(a^2 + b^2 - 2ab) = -(a - b)^2$ et en utilisant le même argument, on a bien $(a + b)^2 - 2(a^2 + b^2) \leq 0$ soit $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$.
2. Si $a^2 + b^2 = 1$ alors l'inégalité $a^2 + b^2 \leq 2ab$ s'écrit $1 \geq 2ab$ soit $ab \leq \frac{1}{2}$ (car $2 > 0$).
De plus $ab - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(2ab + 1) = \frac{1}{2}(2ab + a^2 + b^2) = \frac{1}{2}(a + b)^2$ et donc $ab - \left(-\frac{1}{2}\right) \geq 0$ soit $ab \geq -\frac{1}{2}$.
On a donc bien $-\frac{1}{2} \leq ab \leq \frac{1}{2}$.
3. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab}$. Comme a et b sont strictement positifs, ce quotient est positif ou nul et donc $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

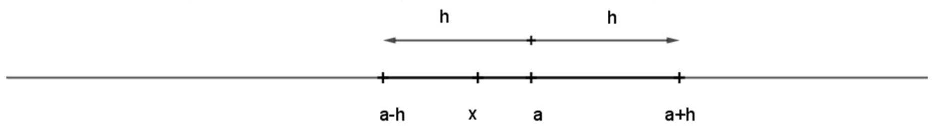
Exercice 3 – Position relative de courbes

On considère les fonctions f, g et h définies sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = 1 - x$, $g(x) = \frac{1}{1+x}$ et $h(x) = 1 - x + x^2$.

1. Représenter ces trois fonctions dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et conjecturer des inégalités vérifiées pour tout réel x de $]-1, +\infty[$ entre $f(x), g(x)$ et $h(x)$.
2. Étudier, suivant les valeurs de x dans $]-1, +\infty[$, le signe de $g(x) - f(x)$ et de $h(x) - g(x)$.

Quelques définitions :
Soit a et x deux nombres réels et soit h un réel strictement positif.

- On dit que a est une valeur approchée de x à la précision h (ou « à h près ») lorsque $a - h \leq x \leq a + h$.

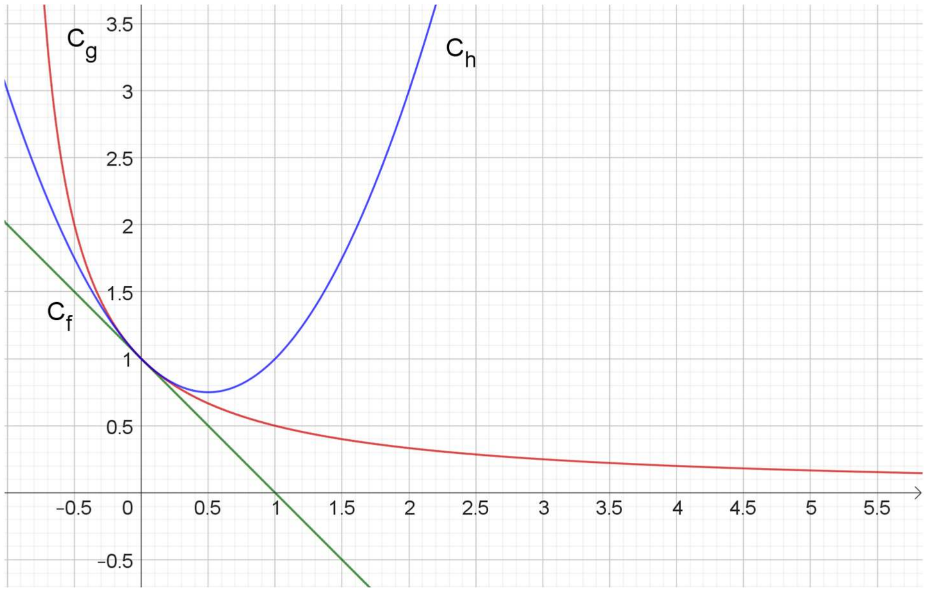


Cela signifie que la distance entre les réels a et x est inférieure ou égale à h.

- On dit que a est une valeur approchée de x par défaut à la précision h (ou « à h près ») lorsque $a \leq x \leq a + h$.
- On dit que a est une valeur approchée de x par excès à la précision h (ou « à h près ») lorsque $a - h \leq x \leq a$.

3. En déduire l'écriture décimale d'une valeur approchée à 10^{-20} de $\frac{1}{1+10^{-10}}$.

1. La courbe représentative de f est une droite, celle de g une hyperbole (image de la courbe représentative de la fonction inverse par la translation de vecteur $-\vec{\imath}$) et celle de h une parabole dont l'équation peut s'écrire $y = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ et dont le sommet est le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$.



Sur $]-1,+\infty[$, la courbe C_f semble en-dessous des deux autres courbes.
La courbe C_h semble en-dessous de la courbe C_g sur $]-1,0]$ et au-dessus sur $[0,+\infty[$.

2. Pour tout x de $]-1,+\infty[$, $g(x)-f(x)=\frac{1}{1+x}-(1-x)=\frac{1-(1+x)(1-x)}{1+x}=\frac{1-(1-x^2)}{1+x}=\frac{x^2}{1+x}$.
Or, pour tout x de $]-1,+\infty[$, $1+x>0$ et $x^2\geq 0$ donc $g(x)\geq f(x)$ c'est-à-dire C_f est en-dessous de C_g.
Pour tout x de $]-1,+\infty[$, $h(x)-g(x)=1-x+x^2-\frac{1}{1+x}=\frac{(1-x+x^2)(1+x)-1}{1+x}=\frac{1-x+x^2+x-x^2+x^3-1}{1+x}=\frac{x^3}{1+x}$
donc $h(x)-g(x)$ a le signe de x^2.
Si $x\in]-1,0]$, alors $h(x)\leq g(x)$ et C_g est au-dessus de C_h. Si $x\in[0,+\infty[$, $h(x)\geq g(x)$ et C_g est en dessous de C_h.

3. Pour tout $x\in[0,+\infty[$, $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$. Donc $0\leq 1-10^{-10}\leq\frac{1}{1+10^{-10}}\leq 1-10^{-1}+10^{-20}$.
Une valeur approchée à 10^{-20} de $\frac{1}{1+10^{-1}}$ est donc **toute valeur** comprise entre $1-10^{-10}=0{,}999\,999\,999\,9$ et $1-10^{-10}+10^{-20}=0{,}999\,999\,999\,900\,000\,000\,01$.

Exercice 4 – Transformations d'écriture et résolution d'équations

Définition : Soit n un entier naturel, on appelle fonction polynôme (ou polynôme) de degré n, une fonction P pour laquelle il existe des réels $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ tels que $a_n\neq 0$ et pour tout réel x, $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$.
Les réels $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ sont appelés les coefficients de P.
Propriété : soit P et Q deux fonctions polynômes. P et Q sont égales (c'est-à-dire pour tout réel x, $P(x)=Q(x)$) si et seulement si P et Q ont le même degré et les mêmes coefficients.

1. Soit P le polynôme $P(x)=x^3+x^2+x+1$.
  a. Montrer que pour tout nombre réel x différent de 1, $P(x)=\frac{1-x^4}{1-x}$.
  b. En déduire que l'équation $P(x)=0$ n'admet qu'une solution et déterminer cette solution.

2. Soit P le polynôme $P(x)=x^3+x^2-3x+1$.
  a. Montrer qu'il existe trois nombres réels a, b, c tels que, pour tout réel x, $P(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$.
  b. Résoudre l'équation $P(x)=0$.

1. **a.** Pour tout nombre réel x différent de 1, $(1-x)P(x)=(1-x)(1+x+x^2+x^3)$ soit, en développant, $(1-x)P(x)=1+x+x^2+x^3-x-x^2-x^3-x^4=1-x^4$.
En divisant par $1-x$ (qui est non nul), on obtient bien $P(x)=\frac{1-x^4}{1-x}$.
  b. Cette égalité s'écrit aussi, pour tout nombre réel x différent de 1 :
$P(x)=\frac{(1-x^2)(1+x^2)}{1-x}$ soit $P(x)=\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)}{1-x}$ soit $P(x)=(1+x)(1+x^2)$.
On en déduit que la seule solution de l'équation $P(x)=0$ est -1 (1 n'est pas solution de l'équation).

2. **a.** Pour tout nombre réel x,
$(x-1)(ax^2+bx+c)=ax^3+(-a+b)x^2+(-b+c)x-c$.

Les deux polynômes $(x-1)(ax^2+bx+c)$ et $P(x)$ sont donc égaux (égalité vérifiée pour tout réel x) si et seulement si a, b, c vérifient le système $\begin{cases} a=1 \\ -a+b=1 \\ -b+c=-3 \\ -c=1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=-1 \end{cases}$.

On en déduit que, pour tout nombre réel x, $P(x)=(x-1)(x^2+2x-1)$.

b. D'après la question précédente, $P(x)=0$ équivaut à $(x-1)(x^2+2x-1)=0$ c'est-à-dire $x=1$ ou $x^2+2x-1=0$.

Le discriminant de cette équation est $\Delta=8$. Ses solutions sont $\frac{-2-\sqrt{8}}{2}=-1-\sqrt{2}$ et $\frac{-2+\sqrt{8}}{2}=-1+\sqrt{2}$.

Les solutions de l'équation $P(x)=0$ sont donc $-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}, 1$.

Exercice 5 – Mises en équation

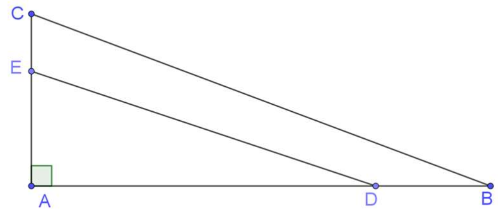
Une bonne mise en équation repose sur un choix judicieux de l'inconnue et sur des conditions imposées aux solutions (comme le signe positif pour une distance)

1. Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB =8 et AC = 3. On considère les points D et E situés respectivement sur les segments [AB] et [AC] tels que AE = BD.
   Existe-t-il une position de ces points D et E telle que l'aire du triangle ADE soit égale à l'aire du quadrilatère BCED ?
2. Déterminer le nombre entier N à deux chiffres tel que :
   - la somme de ses chiffres est égale à 13 ;
   - si on ajoute 34 au produit de ses chiffres, on obtient le nombre « renversé » (mêmes chiffres mais avec des positions échangées).

1. On pose $\mathrm{AE}=\mathrm{BD}=x$ et on doit avoir $0 \le x \le 3$.

L'aire du triangle ADE est alors égale à $\mathcal{A}=\frac{AE \times AD}{2}=\frac{x(8-x)}{2}$.

L'aire $\mathcal{A}'$ du quadrilatère BCED est celle du triangle ABC à laquelle on ôte l'aire du triangle ADE soit $\mathcal{A}'=\frac{AC \times AB}{2}-\mathcal{A}=12-\mathcal{A}$ et l'égalité $\mathcal{A}=\mathcal{A}'$ équivaut à $\mathcal{A}=6$ soit $x(8-x)=12$



Cette équation s'écrit $x^2-8x+12=0$. Elle a pour discriminant $\Delta=16$ et pour solutions 2 et 6.

La deuxième solution est impossible (puisque $0 \le x \le 3$).

Donc la seule position solution est telle que $\mathrm{AE}=\mathrm{BD}=2$.

2. On choisit comme inconnues non pas l'entier N mais ses chiffres a et b en posant $N=10a+b$ et on doit avoir $0<a \le 9$ et $0 \le b \le 9$.

Les données se traduisent par le système $\begin{cases} a+b=13 \\ ab+34=10b+a \end{cases}$ soit $\begin{cases} b=13-a \\ a(13-a)+34=10(13-a)+a \end{cases}$.

La deuxième équation du système s'écrit $a^2-22a+96=0$. Elle a pour discriminant $\Delta=100$ et pour solutions 6 et 16.

Seule la première solution convient (puisque $0<a \le 9$) et alors $b=7$. On a bien $0 \le b \le 9$.

Donc le nombre cherché est $N=67$.

Exercice 6 – Un peu de calcul vectoriel

Le calcul vectoriel est un outil puissant qui permet notamment de caractériser certaines configurations :

- Le point I est le milieu du segment [AB] si et seulement si $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$.
- Le point I est le milieu du segment [AB] si et seulement si, pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})$
- Le quadrilatère $MNPQ$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$.
- Trois points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

La relation de Chasles permet de travailler sur les égalités vectorielles.

Dans tout exercice de géométrie, on commence par faire une figure.

Soit ABC un triangle. On considère les points M et N définis par $\overrightarrow{\mathrm{BM}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AN}}=2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}$. Les points P et Q désignent les milieux respectifs des segments [MN] et [MC].

1. Démontrer que les points A, M et N sont alignés.
2. Déterminer la nature du quadrilatère ABPQ.

1. Comme le vecteur $\overrightarrow{AN}$ est exprimé en fonction des vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, on exprime le vecteur $\overrightarrow{AM}$ en fonction des mêmes vecteurs.
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
et on constate que $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AM}$ ce qui nous permet d'affirmer que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires et donc que les points A, M et N sont alignés.
2. Les points P et Q désignent les milieux respectifs des segments $[MN]$ et $[MC]$ donc $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$.
Or $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BA}$
Donc $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BA}$ ce qui signifie que le quadrilatère $ABPQ$ est un parallélogramme.