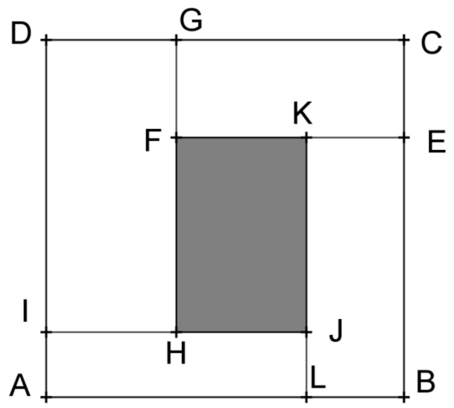
OPE 2021 Éléments de solution

Exercice numéro 1
Cinq rectangles dans un carré



1. Si les quatre rectangles $\mathrm{LBEK}, \mathrm{ECGF}, \mathrm{GDIH}$ et IALJ ont pour périmètre 20, leur demi-périmètre est 10 et donc $\mathrm{LB}+\mathrm{BE}+\mathrm{EC}+\mathrm{CG}+\mathrm{GD}+\mathrm{DI}+\mathrm{IA}++\mathrm{AL}=40$. Mais cette somme est aussi le périmètre du carré, 44. Contradiction.

2. On suppose que les rectangles $\mathrm{IALJ}, \mathrm{LBEK}$ et ECGF ont pour périmètre 20 (un autre choix est possible, de toute façon trois rectangles du bord sont consécutifs…) et que $\mathrm{AL}=x$.

Il vient successivement :

$\mathrm{LB}=11-x,\ \ \mathrm{BE}=10-(11-x)=x-1,$

$\mathrm{EC}=11-(x-1)=12-x,\ \mathrm{CG}=10-(12-x)=x-2,$

$\mathrm{DG}=11-(x-2)=13-x,$

$\mathrm{DI}=10-(13-x)=x-3$

$\mathrm{IA}=11-(x-3)=14-x$

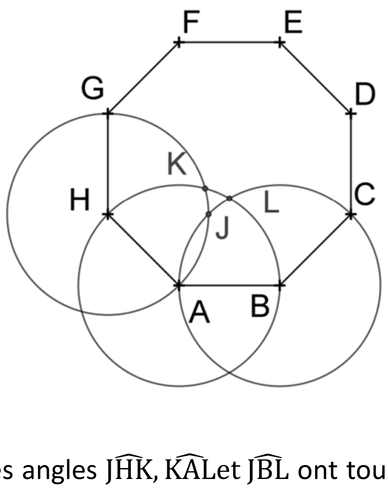
On constate que le demi-périmètre du rectangle IALJ n'est pas 10 mais 14. Reste à regarder les dimensions du rectangle FHJK.

$$\mathrm{HJ}=\mathrm{AL}-\mathrm{GD}=x-(13-x)=2x-13$$
$$\mathrm{FH}=\mathrm{DI}-\mathrm{EC}=x-3-(12-x)=2x-15$$

Le demi-périmètre de ce rectangle est $4x-28$, qui est égal à 10 dans le seul cas où $x=9{,}5$.

Il est donc possible que quatre sur cinq des rectangles aient un périmètre 20.

Exercice numéro 2
Histoires d'octogones



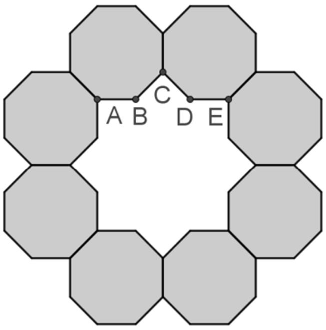
1. Les angles intérieurs d'un octogone régulier ont pour mesure 135° (les droites (CD) et (EF), par exemple, sont perpendiculaires ; si on appelle M leur point d'intersection, le triangle rectangle MDE est isocèle, car ses angles mesurent 45°.

Les triangles AHK et ABL sont équilatéraux par construction et le quadrilatère HJBA est un losange, car il a quatre côtés de même longueur.

Il s'ensuit que les angles $\widehat{\mathrm{KHA}}$ et $\widehat{\mathrm{LBA}}$ ont pour mesure 60° (angles de triangles équilatéraux) et les angles $\widehat{\mathrm{AHJ}}$ et $\widehat{\mathrm{ABJ}}$ ont pour mesure 45° (angles opposés d'un losange dont les deux autres angles ont pour mesure 135°).

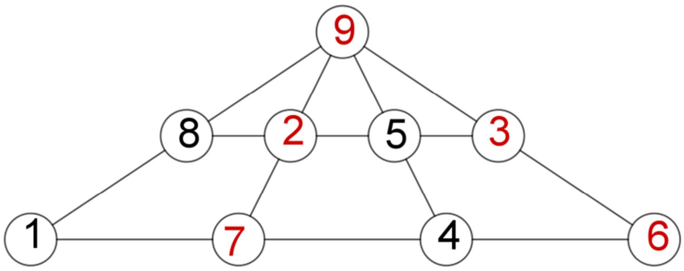
L'angle $\widehat{\mathrm{KAL}}$ a pour mesure 15° (De la mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{BAH}}$, on soustrait celles de $\widehat{\mathrm{BAL}}$et de $\widehat{\mathrm{HAK}}$).

Les angles $\widehat{\mathrm{JHK}}, \widehat{\mathrm{KAL}}$et $\widehat{\mathrm{JBL}}$ ont tous la même mesure 15°. Les triangles HKJ et BJL sont isométriques car ils ont tous les deux un angle de mesure 15° compris entre deux côtés de même longueur (celle du côté de l'octogone). On en déduit que $\mathrm{JK}=\mathrm{JL}$. Le triangle $L\mathrm{AK}$ est dans la même situation que les précédents : un angle de mesure 15° entre deux côtés de la longueur du côté de l'hexagone. On a donc $\mathrm{JK}=\mathrm{JL}=\mathrm{KL}$ et le triangle JKL est équilatéral.



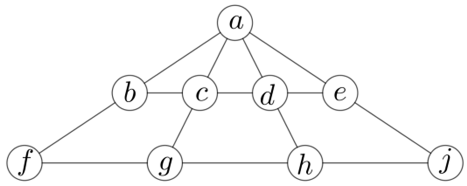
2. L'étoile centrale est constituée de deux carrés images l'un de l'autre par une rotation de centre le centre de la figure et d'angle 45°.
Le côté d'un de ces carrés, par exemple [AE], a pour longueur :
$\mathrm{AE} = \mathrm{AB} + \mathrm{BD} + \mathrm{DE}$ et [BD] est l'hypoténuse du triangle rectangle isocèle BCD de côté 1. Donc $AE = 1 + \sqrt{2} + 1 = 2 + \sqrt{2}$
L'aire d'un des carrés est donc $a = 6 + 4\sqrt{2}$.
Pour avoir l'aire de l'étoile, il faut ajouter 4 fois l'aire du triangle rectangle isocèle de côté 1, c'est-à-dire 2.
L'aire de l'étoile est donc $e = 4\left(2 + \sqrt{2}\right)$

Exercice numéro 3
Chiffres en réseau



1. Les deux sommes partielles des nombres situés sur deux rayons sont égales, c'est heureux puisqu'on doit leur ajouter un même nombre pour obtenir un même résultat. On en déduit que les deux autres sommes partielles sont égales et égales à 9, il reste comme possibilités 7 et 2 d'une part, 6 et 3 d'autre part. On ajuste la place des chiffres sur les horizontales pour donner le même résultat, en l'occurrence 18.

2. Appelons $a, b, c, d, e, f, g, h, j$ les neuf nombres à placer, leurs places étant données par le schéma ci-contre.



Si on appelle S la somme $a + b + f$, un remplissage admissible vérifie :

$a + b + f = S, a + c + g = S, a + d + h = S, a + c + j = S,$
$b + c + d + e = f + g + h + j.$

Une première déduction amène à $4(S - a) = b + c + d + e + f + g + h + j$, et donc la somme de tous les chiffres sauf un doit être multiple de 4. La somme des nombres compris entre 1 et 9 étant 45, les possibilités sont $a = 9, a = 5$ ou $a = 1$.
Si $a = 1$, $S = 12$ et $b + f = c + g = d + h = e + j = 11$, les sommes possibles sont $9 + 2, 8 + 3, 7 + 4$ et $6 + 5$. Regardons comment obtenir 22 en additionnant quatre nombres compris entre 2 et 9 :

9	8					3	2
9		7			4		2
9			6	5			2
9			6		4	3	
	8	7		5			2
	8	7			4	3	
	8		6	5		3	
		7	6	5	4		

Des huit sommes possibles, il n'y en a pas deux qui contiennent à elles deux l'ensemble des chiffres.
Si $a = 5$, $S = 15$, il faut réaliser la somme 10 avec deux chiffres distincts et distincts de 5. Les sommes possibles sont $9 + 1, 8 + 2, 7 + 3, 6 + 4$. Les sommes sur les lignes horizontales sont 20. Regardons comment obtenir 20 en sommant quatre chiffres distincts de 5 :
Là encore, il n'y a pas deux combinaisons contenant à elles deux l'ensemble des chiffres.

9	8					2	1
9		7			3		1
9			6	4			1
9			6		3	2	
	8	7		4			1
	8	7			3	2	
	8		6	4		2	
		7	6	4	3		

La dernière hypothèse, $a = 9$, conduit à un remplissage admissible au moins, comme on l'a vu à la question **1.**

3. Il y a exactement deux façons d'obtenir 18 en additionnant quatre chiffres compris entre 1 et 8 et il y a exactement quatre façons d'obtenir 9 en en additionnant deux. Il y a 24 permutations des « rayons » et deux permutations des horizontales, en tout 48 remplissages admissibles.