



# Olympiades académiques de mathématiques

Mardi 3 avril 2012

## Classes de quatrième

Durée de l'épreuve : 2 heures.  
Les calculatrices sont autorisées.

*Les quatre exercices sont à traiter. Toute trace de recherche sera prise en compte dans l'évaluation des copies ; toute argumentation correcte, qu'elle soit de nature géométrique, calculatoire, dichotomique ou autre sera valorisée.*

## Exercice 1 : la grille infernale

On place des nombres dans des grilles 3 sur 3 selon le principe suivant :

Trois nombres placés sur une même ligne horizontale, sur une même colonne verticale ou sur une même diagonale sont tels que celui du milieu est la demi-somme des deux autres.

1. En appliquant ce principe, déterminer les nombres manquant dans la grille suivante :

3		19
8		

2. Déterminer la somme des neuf nombres de la grille suivante (dans laquelle  $a$  désigne un nombre donné) si on la remplit suivant le même principe :

$a$		
5		23

3. Déterminer les nombres  $x$  et  $y$  si la grille est complétée en appliquant toujours le même principe :

$x$	7	
9		$y$
		20

## Exercice 2 : une spirale

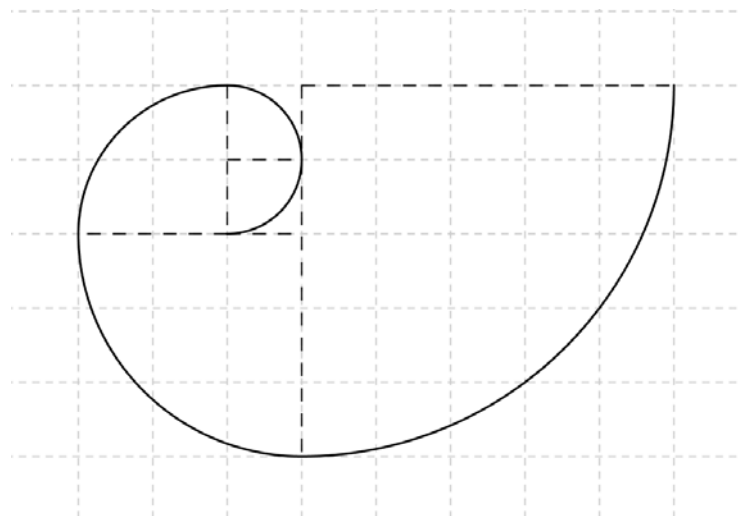
Une telle spirale est obtenue en traçant successivement des quarts de cercle de rayon de plus en plus grand.

Le premier quart de cercle a un rayon de 1, comme le deuxième. Le troisième quart de cercle a un rayon de 2, le quatrième de 3, le suivant de 5.

1. Quel est le rayon du sixième quart de cercle ? du septième ? du dixième ?

2. Le rayon du quinzième quart de cercle est 610 et celui du seizième est 987. Quel est le rayon du dix-septième ?

3. Quel est le rayon du vingtième quart de cercle ?



### Exercice 3 : billes en sacs

1. On place 25 billes dans un sac, 16 billes dans un autre. On dispose par ailleurs d'un nombre suffisant de billes pour réaliser les opérations suivantes, seules autorisées :

- Ôter le même nombre de billes de chaque sac ;
- Doubler le nombre des billes se trouvant dans un des deux sacs.

Avec une succession de telles opérations, est-il possible de vider simultanément les deux sacs ?

2. On place deux billes dans un sac et une bille dans l'autre. Les opérations suivantes sont les seules autorisées :

- Ôter le même nombre de billes de chaque sac ;
- Tripler le nombre des billes se trouvant dans un des deux sacs.

Avec une succession de telles opérations, est-il possible de vider simultanément les deux sacs ?

### Exercice 4 : des triangles et des nombres

Le triangle ABC ci-contre est tel que  $AC = 13$ ,  $AB = 14$  et  $BC = 15$ .  
Soit H, J, K les pieds des hauteurs issues respectivement des sommets C, A, B.

1. Montrer que CH est un nombre entier.
2. Montrer que AJ est un nombre décimal et que BK est un quotient d'entiers.
3. Proposer un triangle dont les trois côtés et les trois hauteurs aient pour longueurs des nombres entiers.

