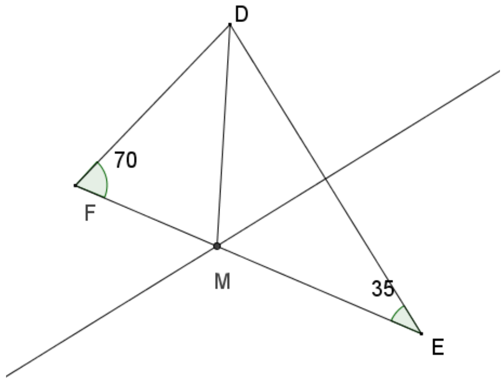
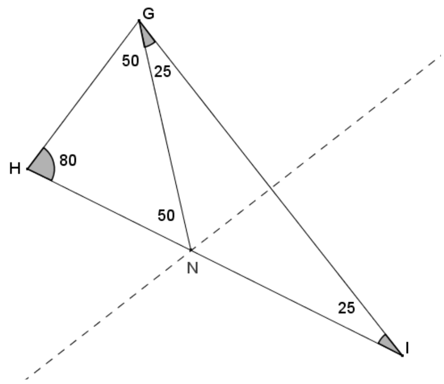
Éléments de solution
Olympiades de mathématiques de quatrième session 2009

Exercice numéro 2
Découpages et assemblages
1. On sait que la médiane [AM] d'un triangle ABC rectangle en A a pour longueur la moitié de la longueur de l'hypoténuse. Les triangles AMB et AMC sont donc tous les deux isocèles de sommet principal M.

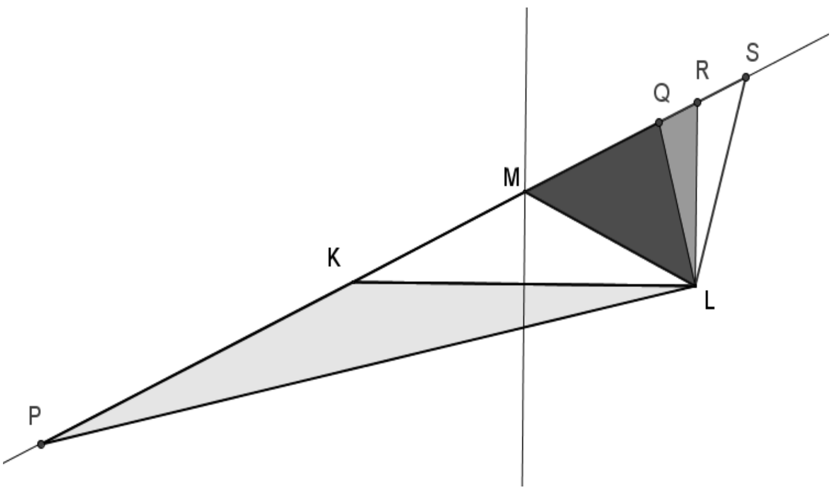
2. *a.* Si on cherche à placer le point M sur le segment [EF] de telle sorte que le triangle EMD soit isocèle de sommet principal M, l'angle de sommet M du triangle MFD est la somme des deux angles à la base du triangle isocèle EMD, sa mesure est donc 70, et le triangle MFD est isocèle de sommet principal D.



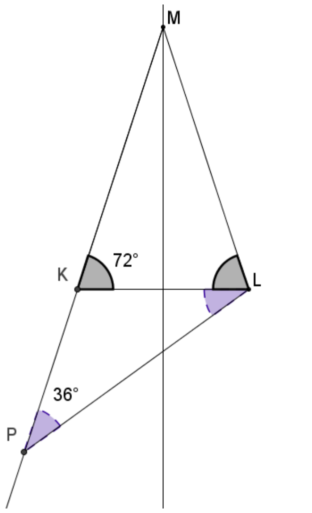
2. *b.* En s'inspirant de ce modèle, mais en cherchant à placer le sommet d'un des triangles isocèles en H, cette fois, on peut trouver d'autres solutions (le problème demande seulement d'en trouver d'autres).

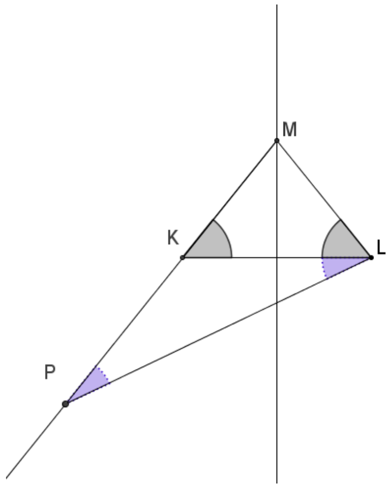


3. Considérons le triangle isocèle KLM, de sommet principal M et dont les angles à la base ont pour mesure x. À une symétrie près, on peut chercher à lui accoler un triangle isocèle de quatre manières différentes : le triangle KPL a le côté [KL] commun avec KPL, qui ne peut être sa base, car alors son troisième sommet serait à la fois sur la médiatrice de [KL] et sur la droite (KM) et ne serait pas M, le triangle MQL, isocèle de sommet principal Q, le triangle MRL, isocèle de sommet principal M (où on retrouve le triangle rectangle), et le triangle MSL, isocèle de sommet principal L.

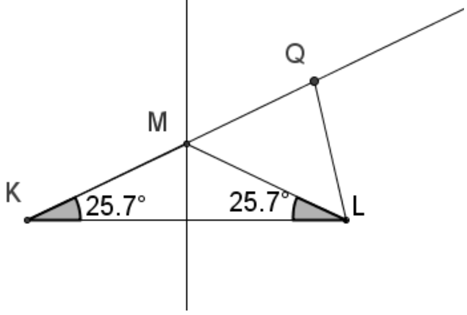


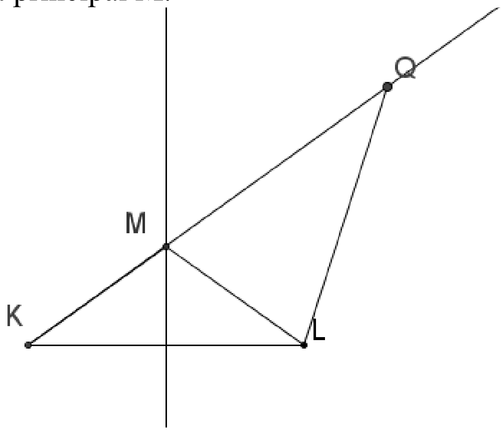
En utilisant les propriétés (somme des mesures des angles d'un triangle, égalité des mesures des angles à la base d'un triangle isocèle), on traduit ces situations en conditions nécessaires portant sur la donnée x.
Dans ce qui suit, les calculs ne sont pas exposés.



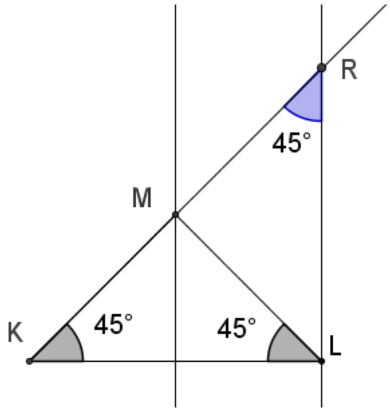


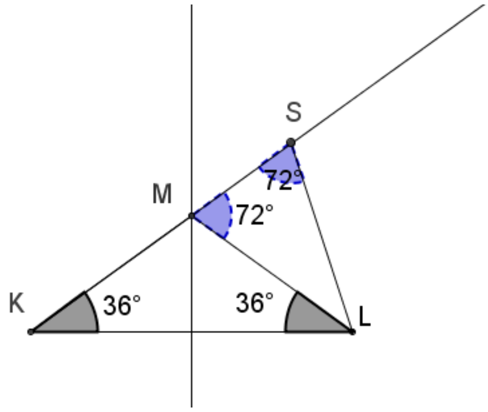
La construction du point P est réalisable sans condition. Le triangle PLM est isocèle de sommet principal L dans le cas où $x = 72$ (l'unité est le degré). Il est isocèle de sommet principal P lorsque $x = \dfrac{360}{7}$. Il n'est naturellement pas envisageable qu'il soit isocèle de sommet principal M.





La construction de Q est réalisable à la condition que x soit inférieur à 45. On remarque que le triangle KLM occupe par rapport au triangle MLQ la position qu'occupait le triangle PKL par rapport au triangle KLM. Les figures obtenues sont donc identiques aux noms près. Les solutions correspondantes sont donc $x = \dfrac{180}{7}$ dans le premier cas et $x = 36$ dans le second.





La construction de R est réalisable sans condition (x est inférieur à 90° par hypothèse). Le triangle RKL étant rectangle en L, L est le seul point à envisager comme sommet principal. C'est réalisé dans le cas où $x = 45$.

La construction de S est réalisable à la condition que x soit inférieur à 60°. Le seul sommet à envisager comme sommet principal est K. C'est possible dans le seul cas $x = 36$.

Exercice numéro 1
L'escalier
1. On trouve (en détaillant) 1 façon pour une marche, 2 pour 2 marches, 3 pour 3 marches, 5 pour 4 marches et 8 façons pour 5 marches.
2. Pour parvenir à la vingtième marche, on peut soit être à la dix-neuvième et monter une marche, soit être à la dix-huitième et monter en une fois les deux dernières. Il n'y a pas d'autre issue. Il s'ensuit que le nombre de façons de monter 20 marches est la somme du nombre de façons de monter dix-neuf marches et du nombre de façons de monter dix-huit marches. On trouve 10 946 façons.

Exercice numéro 3
Des un avec des neuf
La somme N contient 99 termes. En ajoutant 1 à chacun de ces termes, on obtient :
$N+99=100+1000+10\,000+...+10\,000...000$
Ou encore :
$N+99=11\,111...111\,100$
Et finalement :
$N=11\,111...111\,001$
Dans cette dernière écriture on compte 99 chiffres 1.

Exercice numéro 4
Faites-moi une petite place
1. Appelons r le rayon inconnu et H le point de contact entre les cercles C_1 et C_3. Pour des raisons de symétrie, le point P appartient à [OB], et :
OP = $6 - r$
PM = $3 + r$

En appliquant le théorème de Pythagore au triangle rectangle MOP, on obtient après calculs $r = 2$.

2. Appelons S le point tel que MOPS soit un rectangle. Le segment [PS] a pour longueur 3 et coupe le cercle C_3 en K. On a donc SK = 1.
Le segment [SM] a pour longueur 4 et coupe le cercle C_1 en J. On a donc SJ = 1.
Il s'ensuit que le cercle de centre S et de rayon 1 est tangent aux cercles C_1 et C_3 (dans chaque cas, la distance des centres est égale à la somme des rayons).
La distance OS est 5 (diagonale du rectangle) et est donc égale à la différence des rayons de C_0 et du cercle de centre S et de rayon 1. Ces cercles sont donc tangents.

Le point S est donc le point Q cherché, MOPQ est un rectangle et le rayon du cercle C_4 vaut 1.