



# Olympiades académiques de mathématiques



## Académie de Versailles

Mercredi 16 mars de 8 heures à 12 h 10

Pause de 10 heures à 10 h 10

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de dix minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Les candidats ne sont pas autorisés à quitter les locaux avant 11 heures.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

**Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.**

## Exercices académiques

Les candidats traitent **deux exercices**. Ceux de la série S traitent les exercices numéros 4 (*Tant qu'il y aura des sommes*) et 5 (*La sécurité dans le désordre*), les autres traitent les exercices numéros 6 (*Table tournante*) et 7 (*Éloge de la régularité*)

## Exercice académique numéro 4 (à traiter par les candidats de la série S)

### *Tant qu'il y aura des sommes*

On cherche deux ensembles  $A$  et  $B$ , dont les éléments sont des nombres entiers naturels, tels que tout entier naturel compris entre 0 et 2 016 puisse être écrit comme la somme d'un élément de  $A$  et d'un élément de  $B$ . De plus,  $A$  et  $B$  doivent avoir le même nombre d'éléments.

1. Donner un exemple dans lequel  $A$  et  $B$  ont chacun 1 008 éléments.
2. On appelle  $p$  le nombre minimal d'éléments que doivent avoir les ensembles  $A$  et  $B$  pour réaliser l'objectif. Montrer que  $p \geq 45$ .
3. Donner un exemple d'ensembles  $A$  et  $B$  ayant chacun 45 éléments et répondant à la question.

## Exercice académique numéro 5 (à traiter par les candidats de la série S)

### *La sécurité dans le désordre*

Un fabricant de serrures propose un nouveau modèle de code de protection :

*a.* On enregistre un nombre, appelé *code initial*, formé des trois chiffres 1, 2 et 3, chacun apparaissant une et une seule fois. On ferme la porte.

*b.* Pour ouvrir la porte, il faut composer un nombre, lui aussi formé des trois chiffres 1, 2 et 3 apparaissant une et une seule fois, mais aucun des trois n'occupant la même place que dans le *code initial*.

Ainsi, si le *code initial* est 132, le nombre 321 permet d'ouvrir la porte, 123 ne le permet pas.

1. *a.* Si le nombre 123 permet d'ouvrir la porte, quels sont les *codes initiaux* possibles ?  
*b.* Si le nombre 123 ne permet pas d'ouvrir la porte, quels sont les *codes initiaux* possibles ?  
*c.* On suppose que des essais infructueux ne bloquent pas le mécanisme d'ouverture. Une personne désireuse d'entrer peut ainsi essayer plusieurs fois. Montrer que la série 123 – 231 – 132 – 213 permet d'ouvrir la porte.  
*d.* Existe-t-il une suite de trois nombres permettant d'ouvrir la porte ?

On améliore le système : le *code initial* est un nombre formé avec les quatre chiffres 1, 2, 3 et 4, le mode d'emploi étant le même que précédemment.

2. *a.* Un *code initial* étant fixé, combien de nombres différents permettent d'ouvrir la porte ?

*b.* Y a-t-il une série de quatre nombres permettant d'ouvrir la porte quel que soit le *code initial* ?

3. Dans le cas d'un *code initial* à cinq chiffres, y a-t-il une série de huit nombres permettant d'ouvrir la porte ?

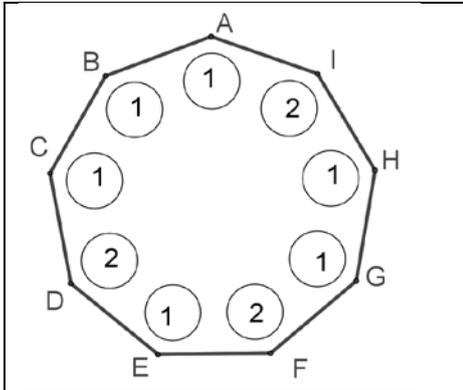
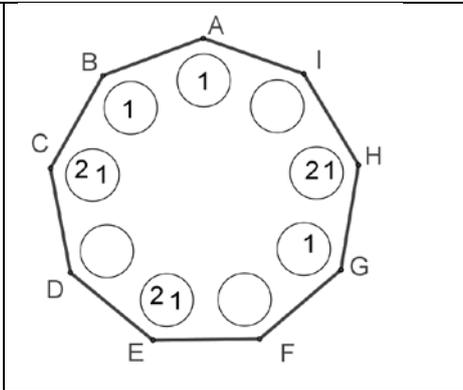
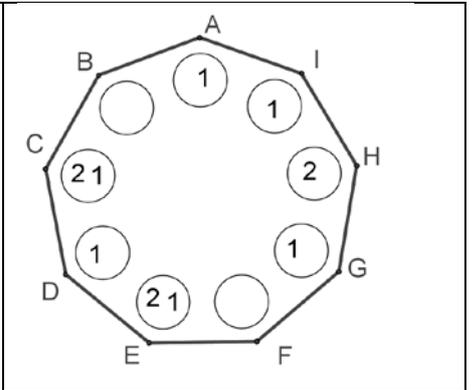
## Exercice académique numéro 6 (à traiter par les candidats des séries autres que la série S)

### Table tournante

Neuf personnes sont assises autour d'une table. Un sac contient 8 pièces de 1 euro et 8 pièces de 2 euros. On pose devant chaque personne une pièce prise au hasard dans le sac.

On demande dans un premier temps à chaque personne ayant reçu une pièce de 2 euros de la donner à son voisin de gauche. Dans un second temps, chaque personne ayant reçu une pièce de 1 euro doit la donner au voisin de droite de son voisin de droite.

Exemple :

		
Distribution initiale	Passage des « 2 euros » à gauche	Passage des « 1 euro » 2 fois à droite

- On reprend l'exemple précédent, en remplaçant les pièces de 1 euro par des pièces de 2 euros et vice-versa. Quelle distribution obtient-on après les deux mouvements de pièces ?
- Montrer que si une personne, son voisin de droite et son voisin de gauche ont chacun reçu une pièce de 2 euros, un des participants au moins est démuné à l'issue des mouvements.
  - Quelles sont les distributions initiales qui permettent que chaque personne ait une pièce à l'issue des mouvements ?

On procède de la même façon avec 10 personnes attablées et un sac contenant 9 pièces de 1 euro et 9 pièces de 2 euros. On fait l'hypothèse qu'après les deux temps de redistribution, chaque personne a au moins une pièce devant elle.

- Montrer que deux voisins ne peuvent pas avoir chacun une pièce de 2 euros.
  - Montrer qu'il est impossible qu'une personne, son voisin de droite et son voisin de gauche aient chacun une pièce de 1 euro.
  - Montrer que toute personne ayant une pièce de 1 euro ne peut pas être entourée de voisins ayant chacun une pièce de 2 euros.
  - Conclure quant à la validité de l'hypothèse « après les deux temps de redistribution, chaque personne a au moins une pièce devant elle ».

## Exercice académique numéro 7 (à traiter par les candidats des séries autres que la série S)

### Éloge de la régularité

Pierre a construit un parcours de marche à pied de 15 km entre les points  $A$  et  $B$ . Ce parcours se divise en trois parties, chacune d'au moins 1 km : la première est une montée, la seconde est en terrain plat, la troisième est une descente.

L'objectif est de se conformer à un rythme de progression donné. Les marcheurs doivent parcourir les montées à la vitesse de 4 km/h, les descentes à 6 km/h, et marcher à 5 km/h en terrain plat. Dans ces conditions, le parcours de  $A$  vers  $B$  s'effectue en exactement 3 heures.

- Clara a effectué le parcours, de  $B$  vers  $A$ . Elle a mis 3 heures. Prouver qu'elle a couru un moment.
- Isabelle a effectué le parcours, elle aussi de  $B$  vers  $A$ . Elle a mis 3 heures et quart. Prouver qu'elle s'est arrêtée un moment.