Exercice académique numéro 4 (à traiter par tous les candidats)

Un compte de fées

1. Clara désigne la chambre 2. Ou bien le prince y est, et c'est gagné, ou bien il est en 1 ou en 3 et il se trouvera déplacé… vers la 2, que Clara désignera à nouveau.

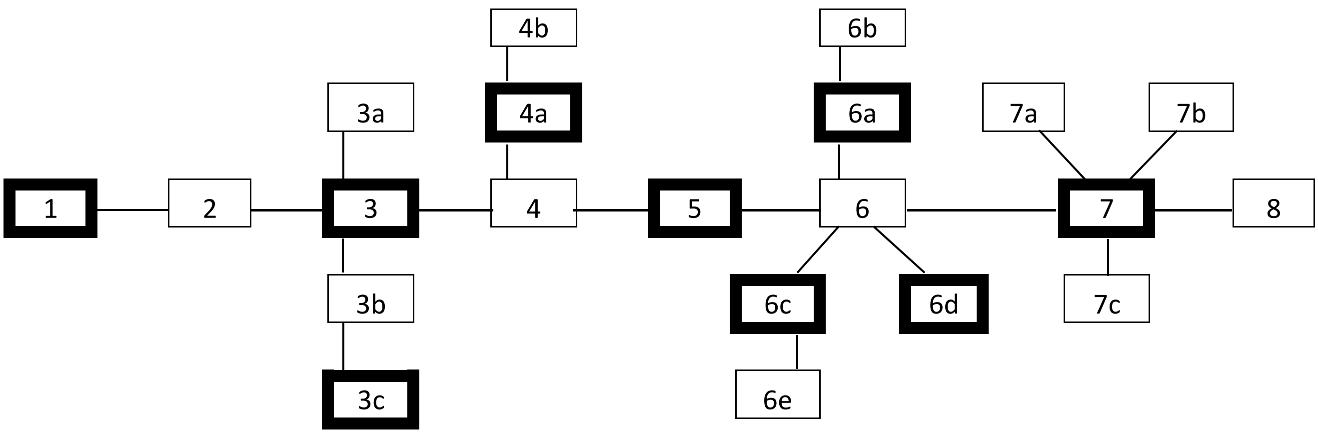
2. ***a.*** Clara désigne la chambre 2. Si le fils du roi n'y est pas, il n'est pas non plus dans la 1 ni dans la 3 (nombres impairs). Le deuxième jour, elle désigne la chambre 3. Si le prince n'y est pas, il n'est pas non plus dans la 4, et est déplacé pour le troisième jour dans une chambre de numéro pair supérieur ou égal à 4. Clara poursuit sa recherche par numéros croissants. Au quatorzième jour, en cas d'échec à ses treize tentatives, le prince se trouve dans une chambre de numéro impair supérieur à 15. Le jour suivant, il sera dans la chambre 16.

b. Clara fait l'hypothèse que le prince se trouve le 1er juin ans une chambre de numéro pair, et applique la démarche précédente. Si cette démarche échoue, c'est que le prince se trouvait dans une chambre de numéro impair. Le 16 juin, il est dans une chambre de numéro pair. Elle applique la même démarche et le trouve avant le 30 juin.

3. ***a.*** Pour dérober son fils au plan de Clara, le roi ne peut que le faire passer chaque jour d'une chambre dans une chambre voisine. Le domaine visité, si on peut dire, par le prince, est d'un seul tenant (partie grisée du tableau ci-dessous). En s'y attaquant par une extrémité (et même si elle ne le sait pas), Clara contraint le roi à l'étendre, jusqu'à ce que toutes les chambres aient été utilisées par le prince.

b. D'après la question précédente, les fenêtres de chaque chambre dont le numéro est compris entre 2 et 16 auraient été ouvertes deux fois, ce qui fait 30 essais, trop pour un mois de février.

4. Dans le schéma ci-dessous, chaque fois que deux chambres communiquent, l'une est blanche, l'autre est noire (bordure épaisse). Un tel coloriage est possible, puisque le plan ne comporte pas de cycle



Clara procède en deux temps :

1. Elle fait l'hypothèse que le prince est, le premier jour, dans une chambre noire. Les chambres visitées seront alternativement noires et blanches. On suppose évidemment une succession d'échecs, sinon le gain est définitif.

Jour	Chambre visitée	Commentaire	Chambres exclues (le prince n'y est pas et ne pourra plus y être si Clara choisit bien)
1	7	Cette chambre est vide, ses voisines (blanches) aussi	7, 7a, 7b, 7c et 8
2	6	Cette chambre ne pourrait être occupée que si le prince était le premier jour en 7 (exclu), 6a, 6c, 6d ou 5.	6d exclue : si le prince y avait été le jour 1, il serait en 6 le jour 2.
3	6a	Cette chambre ne peut être occupée que si le prince était, le jour 2, en 6b.	6b éliminée ainsi que 6a dont l'éventuel occupant n'aurait pu venir se de 6 ou 6b.
4	6	Pour vérifier que le prince n'y est pas arrivé (en provenance de 5 ou 6c)	

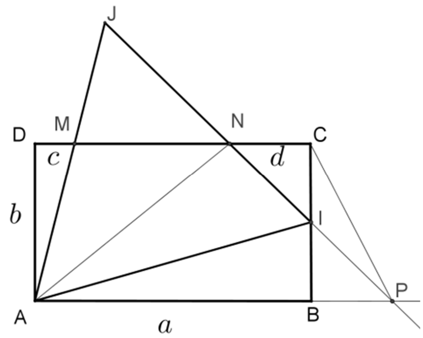
5	$\boxed{6c}$	Pour les mêmes raisons que 6a au jour 3	6e et 6c éliminées comme plus haut
6	6	Il faut repasser par 6 pour éviter que le prince puisse être venu de 5 le jour précédent.	
7	$\boxed{5}$		6
8	4	Pourrait être occupé par le prince venant de 4a ou 3	5
9	$\boxed{4a}$	Même tactique que plus haut : élimine 4b	4a et 4b
10	4	Il faut en repasser par là	
11	$\boxed{3}$		Élimine 3a
12	3b		Élimine 3c
13	$\boxed{3}$	Si le prince venait de 2…	
14	2	Élimine aussi 1	2, 1

2. Au jour 15, comme l'hypothèse précédente était fausse, on doit admettre que le prince, dans une chambre blanche au jour 1, et dans une chambre blanche. Un parcours possible pour Clara débute par la chambre 2 et reprend symétriquement le parcours décrit ci-dessus. Ces deux parcours constituent un ensemble gagnant et occupent mois de 28 jours.

Exercice académique numéro 5 (à traiter par les candidats de la série S)

Triangle débordant

1. La droite (MN), parallèle à (AP) et passant par le milieu M de [AJ], est la « droite des milieux » du triangle JAP. Le triangle JMN a donc une aire égale au quart de l'aire de JAP.
N étant le milieu de [JP], la médiane [AN] du triangle JAP détermine deux triangles d'aire égale à la moitié de l'aire de JAP, les triangles JAN et NAP.
I est le milieu de [NP], les triangles NAI et PAI ont donc la même aire.
Le triangle JAP est donc partagé en quatre triangles de même aire, un constitue la partie du triangle AIJ extérieure au rectangle, deux la partie intérieure.
La fraction demandée est donc $\frac{2}{3}$.



2. Appelons a, b, c et d les longueurs AB, AD, DM et NC.
L'égalité 2 MN = AP s'écrit, compte tenu de l'égalité entre NC et BP c(symétrie de centre I) :
$2(a-d-c)=a+d$, d'où on tire $a=3d+2c$.
On calcule de trois manières différentes la longueur du côté du triangle équilatéral :
$\mathrm{AI}^2=a^2+\frac{b^2}{4}$ d'une part (triangle AIB), $\frac{\mathrm{AI}^2}{4}=b^2+c^2$(triangle ADM), $\frac{\mathrm{AI}^2}{9}=d^2+\frac{b^2}{4}$ (triangle CNI)
On a donc :

$$a^2+\frac{b^2}{4}=4b^2+4c^2=9d^2+9\frac{b^2}{4}$$

D'où le système : $\begin{cases}4c^2=a^2-\frac{15}{4}b^2\\ 9d^2=a^2-2b^2\end{cases}$, qui fournit $\begin{cases}2c=\sqrt{a^2-\frac{15}{4}b^2}\\ 3d=\sqrt{a^2-2b^2}\end{cases}$

Et comme $a=3d+2c$, on parvient à la condition nécessaire $a=\sqrt{a^2-\frac{15}{4}b^2}+\sqrt{a^2-2b^2}$.

On peut poser $=\frac{a}{b}$. L'équation $x=\sqrt{x^2-\frac{15}{4}}+\sqrt{x^2-2}$ peut s'écrire d'abord $\left(x-\sqrt{x^2-2}\right)^2=x^2-\frac{15}{4}$, c'est-à-dire $x^2-2x\sqrt{x^2-2}+\frac{7}{4}=0$, puis $4x^2(x^2-2)=x^4+\frac{7}{2}x^2+\frac{49}{16}$, et finalement :
$48x^4-184x^2-49=0$, dont la solution positive (unique) est $\frac{7}{2\sqrt{3}}$.

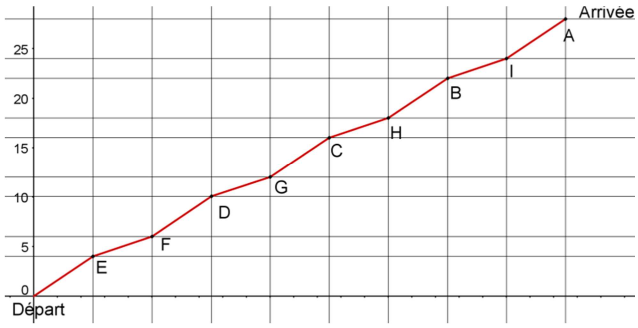
Finalement, les rectangles pour lesquels la situation prise comme hypothèse se produit ont un rapport $\frac{Longueur}{largeur}$ égal à $\frac{7}{2\sqrt{3}}$. Ce nombre est légèrement supérieur à 2 (mais ce n'est pas une raison pour croire qu'il est *égal* à 2).

N.B. Il existe d'autres façons de conduire ces calculs peut-être plus aisément, l'une consiste à utiliser le côté du triangle équilatéral comme variable principale et à exprimer les autres distances en fonction d'elle.

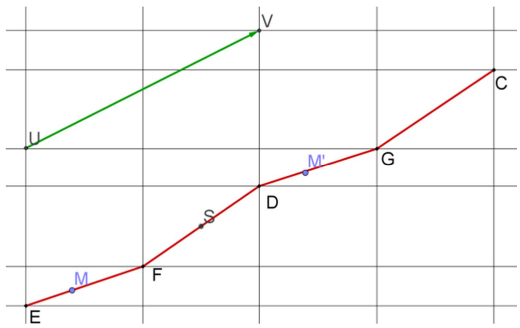
Exercice académique numéro 6 (à traiter par les candidats des séries autres que S)

Les randonneurs

1. La moyenne horaire est : $v = \frac{28}{4,5}$
Arrondie au mètre, cette vitesse moyenne est donc 6, 222 km/h.



2. On place dans un repère les points de coordonnées (4,5 ; 28), (3,5 ; 22), (2,5 ; 16), (1,5 ; 10), (0,5 ; 4) par lesquels passe nécessairement la courbe représentant la distance parcourue en fonction de la durée de parcours (on procède par retour arrière).
Cette courbe passe aussi par les points de coordonnées (0 ; 0), (1 ; 6), (2 ; 12), (3 ; 18), (4 ; 24).
La courbe réalisée en joignant les points successifs par des segments de droite répond au problème. On vérifie en effet que la translation de vecteur $\vec{u} = \left(1, \frac{28}{4,5}\right)$ transporte tout point de la courbe d'abscisse inférieure à 3,5 en un autre point de la courbe.
Cette courbe ne représente pas la seule solution du problème.



3. Appelons x la distance à parcourir pour Énée et y la distance à parcourir pour Didon. Écrivons que le temps qu'il faut à Didon pour atteindre l'arrêt aval est le même que celui qu'il faut à Énée pour atteindre l'arrêt amont, prendre le bus (ce qu'on suppose instantané) et arriver en bus jusqu'à l'arrêt aval :

$$\frac{y}{4} = \frac{x}{6} + \frac{x+y}{60}$$

Ce qui conduit à $14y = 11x$
La distance à parcourir pour Didon était la plus courte (ce qui n'a pas empêché Énée d'être le premier dans le bus).