Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades académiques de mathématiques

Académie de Versailles

Sujet séries L, ES, STMG

Mercredi 18 mars de 8 heures à 12 heures

(Petite variation autorisée selon les horaires propres à l'établissement)

Les objets calculatrices sont autorisés, à l'exclusion de tout autre appareil électronique.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

L'épreuve comporte quatre exercices, tous à traiter dans le temps imparti. Il est conseillé de ne pas en privilégier trop fortement un sur les autres.

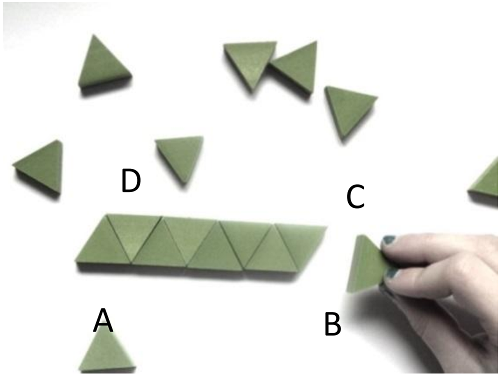
Durée de la composition : 4 heures

Sauf cas de force majeure, aucun candidat n'est autorisé à quitter définitivement la salle de composition moins de 3 heures après le début. Un candidat qui quitterait la salle au bout de trois heures ou moins doit rendre sa copie et son exemplaire du sujet.

Exercice numéro 1
(proposé par le jury national)

Défi entre sœurs

Patiemment, Clémence aligne les triangles équilatéraux identiques de son jeu de mosaïque en les juxtaposant comme le montre la photo ci-contre.
Sa sœur, Léa, qui est en première et toujours en quête de quelques calculs à effectuer, s'amuse à trouver la **valeur exacte** des longueurs des diagonales des quadrilatères obtenus.
Chaque triangle équilatéral a pour côté 1. On note :

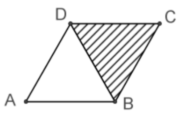


- ABCD un quadrilatère construit par Clémence ;
- L = AC la longueur de la diagonale [AC] ;
- l = BD la longueur de la diagonale [BD].

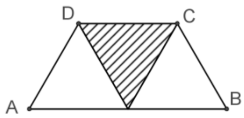
Partie A

1. Calculer la longueur d'une hauteur d'un triangle équilatéral de côté 1.

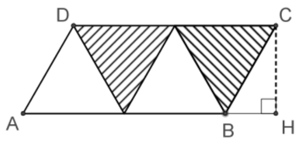
2. Calculer les longueurs l et L pour les cas suivants :



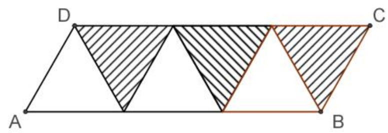
Deux triangles



Trois triangles



Quatre triangles



Six triangles

Partie B

Clémence continue à ajouter des triangles et défie sa sœur de poursuivre ses calculs de diagonales. Léa note n le nombre de triangles équilatéraux alignés (n est un entier supérieur ou égal à 2) et se met à chercher :

1. Lorsque le nombre n de triangles est **pair,** montrer que la longueur de la diagonale la plus grande est égale à $L = \sqrt{p^2 + p + 1}$, où $p = \frac{n}{2}$.

2. Si Clémence ajoute un triangle supplémentaire au cas précédent, que deviennent les longueurs l et L ?

3. Clémence a aligné 56 triangles. Déterminer les longueurs l et L calculées par Léa.

Partie C

Observant tous les calculs de longueur de diagonales effectués, Léa conjecture deux propriétés :

1re propriété : « Pour tout nombre n de triangles juxtaposés, L est la racine carrée d'un nombre impair »

2^{e} propriété : « Pour tout nombre n de triangles juxtaposés, L est la racine carrée d'un nombre premier »

On rappelle qu'un nombre premier est un entier naturel divisible seulement par 1 et lui-même ; par exemple 2, 11, 29 sont des nombres premiers et 1, 8, 33 ne le sont pas.

1. Valider ou invalider chacune de ces propriétés.

2. Peut-on affirmer que la racine carrée de tout nombre premier est la longueur possible d'une diagonale d'un quadrilatère ABCD du type ci-dessus ?

3. Pourquoi n'est-il pas possible d'obtenir une diagonale de longueur $\sqrt{2\,015}$?

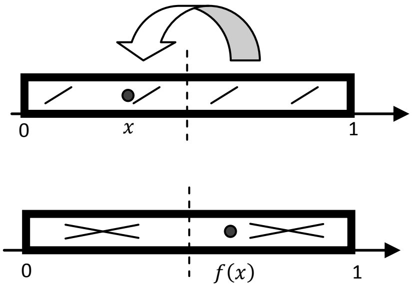
4. Clémence a construit un quadrilatère dont une diagonale mesure $\sqrt{1\,015\,057}$. Combien de triangles a-t-elle utilisés ? Donner toutes les réponses possibles.

5. Clémence dit à sa sœur : « sur les grands quadrilatères, à chaque fois qu'on ajoute deux triangles, la diagonale augmente d'environ 1 ». Le constatez-vous aussi ? (détailler la démarche). Si oui, le démontrer.

Exercice numéro 2

(proposé par le jury national)

On est les rois !



Le boulanger place une fève, replie la pâte (qu'il a, ici, préalablement striée) sur elle-même, et l'étale dans le sens de la longueur : celle-ci s'étire jusqu'à retrouver ses dimensions initiales. Cette transformation, que l'on peut répéter, a donné lieu à quelques études mathématiques, dont cet exercice s'inspire.

Partie A – La transformation du boulanger

On considère la fonction f définie sur $[0\,,1]$ par :

$$f(x) = 2x \text{ si } x \leq \frac{1}{2} \text{ et } f(x) = 2(1-x) \text{ sinon.}$$

1. Montrer que l'image par f d'un élément de [0, 1] appartient à [0, 1].

2. Justifier pourquoi cette fonction f modélise le déplacement de la fève.

Partie B – Parcours d'une fève : cycles et cible

Les images successives par f d'un élément x de $[0\,,1]$ sont notées $x_1 = f(x)$, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$ etc. Elles correspondent aux positions successives de la fève initialement placée à l'abscisse x.

1. Quelles sont les 9 positions qui suivent l'abscisse $\frac{1}{3}$? l'abscisse 0, 33 ? Commenter.

2. Est-il possible qu'une fève, placée à l'abscisse x, revienne à sa position de départ en un seul coup ? En deux coups (mais pas en un) ? En trois coups (mais ni en un ni en deux) ? Préciser à chaque fois toutes les valeurs de x pouvant répondre à la question.

3. Quand une fève placée à l'abscisse x vient, après un nombre fini d'étapes du processus, à occuper l'abscisse nulle, on dit que « x atteint sa cible ». Donner un exemple où x atteint sa cible, et un autre où x ne l'atteint pas.

4. Le nombre $\frac{2015}{2^{2015}}$ atteindra-t-il la cible ?

5. Déterminer tous les nombres de $[0\,,1]$ atteignant leur cible.

Partie C – Étude d'un algorithme.

1. Soit un nombre x dont on suppose qu'il atteint la cible. Modifier l'algorithme proposé en **Annexe** afin qu'il affiche, dans ce cas, le nombre d'étapes nécessaires pour rejoindre le réel 0 (on recopiera le nouveau code sur sa copie).

2. D'après les questions **B.5**. ou même **B.2.**, le nombre $\frac{1}{9}$ n'atteint pas sa cible. Comment devrait se comporter l'algorithme après avoir saisi $x = \frac{1}{9}$ en entrée ? Quand on le programme sur une machine de type PC ou calculette, toujours avec $x = \frac{1}{9}$ en initialisation, puis qu'on l'exécute, il affiche cependant en sortie obtenir $x = 0$ au bout d'une cinquantaine d'itérations. Avancer une explication.

Annexe

Variables
    x est un élément de $[0\,,1]$
Début
    Saisir le nombre x compris entre 0 et 1
    Tant que $x \neq 0$ **faire**
        Si $x \leq \frac{1}{2}$ **alors**
            x **prend la valeur** $2\,x$
        Sinon
        x **prend la valeur** $2(1-x)$
    Fin tant que
Fin

Exercice numéro 3
(proposé par le jury académique)

Une transformation

Pour tout entier naturel n écrit dans le système décimal, on effectue le produit de n par la somme de ses chiffres, qu'on note $R(n)$. Par exemple, $R(2\,015) = 2\,015 \times (2+0+1+5) = 16\,120$.

1. Résoudre chacune des équations suivantes :

a. $R(n) = n$;
b. $R(n) = 2n$;
c. $R(n) = 36$.

2. Existe-t-il un entier n tel que $R(n) = 2\,015$?
3. On s'intéresse à présent aux nombres n dont l'image par R est comprise entre 2 000 et 2 100.
a. Y a-t-il des nombres n s'écrivant avec 4 chiffres et tels que $R(n)$ soit compris entre 2 000 et 2 100 ?
b. Y a-t-il des nombres n s'écrivant avec 2 chiffres et tels que $R(n)$ soit compris entre 2 000 et 2 100 ?
c. Caro dit que, parmi les nombres dont l'image par R est comprise entre 2 000 et 2 100, il y en a autant entre 100 et 200 qu'entre 200 et 300. Bela pense le contraire. Sans les départager, Ali proclame « de toutes façons, il n'y en a aucun entre 300 et 400 ». Qui a raison ?

Exercice numéro 4
(proposé par le jury académique)

Temps de calcul

Soit N un entier naturel non nul. On choisit au hasard un de ses diviseurs stricts, qui remplace N dans l'algorithme, et on recommence jusqu'à obtenir 1. On compte une seconde entre deux choix successifs. Il s'agit de déterminer la durée moyenne des séquences conduisant de N à 1.

1. Dans cet exemple, N = 12. Les suites possibles sont : (12, 6, 3, 1), (12, 6, 2, 1), (12, 6, 1), (12, 4, 2, 1), (12, 4, 1), (12, 3, 1), (12, 2, 1), (12,1).
« Facile, dit Bob, il y a trois séquences durant 3 secondes, quatre durant 2 secondes et une durant une seconde ; la moyenne est donc $\frac{3\times3+4\times2+1\times1}{8}$, c'est-à-dire 2,125 s ».
« Non, dit Alice, la durée moyenne d'une séquence est $\frac{61}{30}$ s ».
Qui a raison ?

2. On donne les deux nombres N = 35 et P = 1 225. On précise que N = 5 x 7 et que P = N². Quelle est la durée moyenne des séquences conduisant de P à 1 ?