Éléments de solution

Exercice 3 Concours S
Une suite à seize temps

1. Il y a 16 cases. En les prenant par groupes de trois distincts de la gauche vers la droite, on obtient 5 groupes de trois et la dernière case est isolée. Si les cinq sommes sont inférieures à 24, la somme de ces sommes est inférieure à 120. La somme des entiers compris entre 1 et 16 étant 136, la dernière case devrait avoir un contenu supérieur à 16, ce qui n'est pas possible.

2. Le raisonnement précédent peut être reproduit, qui donne le nombre 16 dans la dernière case, mais aussi dans la première à gauche en utilisant d'autres groupes de trois cases. Plusieurs cases peuvent ainsi être condamnées à contenir 16. C'est impossible.

3. *a*. On suppose que toutes les sommes des contenus de trois cases sont inférieures ou égales à 25. La méthode des regroupements de trois cases peut être utilisée ici : si on laisse la première case à gauche isolée, on obtient 5 regroupements de trois cases, de somme inférieure ou égale à 5 fois 25, soit 125, et il reste un minimum de 11 pour a_1. Si les cinq regroupements de trois cases ignorent la quatrième, même résultat, et a_4 est supérieur ou égal à 11, et ainsi de suite.

3. *b*. Question annulée, énoncé mal formulé.

Exercice 4 Concours S
Qui est entré dans l'algorithme ?

Valeur de L	0	32	17	12	7				
Valeur de K	32	17	12	7	7				
L ≠ K ?	oui	oui	oui	oui	non				

Valeur de L	0	843	423	213	108	58	33	18	13	8	
Valeur de K	843	423	213	108	58	33	18	13	8	8	
L ≠ K ?	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	non	

2. L'algorithme s'arrête lorsque K + U(K) = 2 K, c'est-à-dire lorsque K est un nombre égal à son chiffre des unités, donc un nombre entier s'écrivant avec un seul chiffre.

3. Comparons K + U(K) et 2(K – 1) :

K + U(K) –2 (K – 1) = U(K) – K + 2.

Le résultat est négatif dès que K s'écrit avec plus de deux chiffres. La suite des valeurs de L est donc décroissante jusqu'à la première (et dernière, car alors l'algorithme s'arrête) occurrence d'un nombre s'écrivant avec un seul chiffre.

4. Les antécédents du nombre 3 sont les K solutions de l'équation K + U(K) = 6. Comme K et évidemment U(K) sont des entiers positifs, on en déduit que K n'a qu'un chiffre, qui est d'ailleurs U(K). Finalement c'est le nombre 3 qui a été introduit dans l'algorithme, lequel s'est arrêté de suite.

5. Les antécédents du nombre 8 sont les K solutions de l'équation K + U(K) = 16. Si on écrit K = 10 a +b, que a, entier, soit ou non un nombre s'écrivant avec un seul chiffre, on parvient à l'équation :

$10\,a + 2\,b = 16$

Les couples d'entiers solutions sont (0, 8), et (1, 3). On retrouve le 8 avec lequel l'algorithme commence et finit en même temps. Les nombres conduisant en un pas à 13 peuvent être déterminés en résolvant l'équation

$10\,a + 2\,b = 26$

Les couples d'entiers solutions sont (1, 8) et (2, 3) ; au pas précédent de l'algorithme, on avait donc obtenu 18 ou 23.

On vérifie que tout nombre de plus d'un chiffre entré dans l'algorithme donne un dernier affichage :

9 ou 4 s'il se termine par 9 ou 4, 8 ou 3 s'il se termine par 8 ou 3, 7 ou 2 s'il se termine par 7 ou 2, 6 ou 1 s'il se termine par 6 ou 1, 5 ou 0 s'il se termine par 5 ou 0.