Exercice 3 du concours ES, L, STMG
Élection paradoxale

1. Le total des points obtenus par les trois candidats est le produit du nombre de votants par 7, chaque votant ayant attribué 7 points. Il y avait donc 20 votants.

2. Ali a été classé 4 fois premier. Si on note x le nombre de fois qu'Ali a été classé deuxième et y le nombre de fois qu'il a été classe troisième, on a : $2x + 4y = 40$, c'est-à-dire $x + 2y = 20$. Compte tenu du nombre de votants, on a aussi $x + y = 16$. Il s'ensuit que $y = 4$ et $x = 12$. Ali a été classé 12 fois deuxième et 4 fois troisième.

Caro a été classée le plus souvent première, et elle l'a été un nombre impair de fois, puisque son total est impair, et un nombre de fois supérieur à 7 puisqu'elle l'a été le plus souvent. Faisons dans chacune des hypothèses le même raisonnement que pour Ali. On appelle cette fois a le nombre de fois que Caro a été classée deuxième et b le nombre de fois qu'elle a été classée troisième (a et b sont des entiers naturels) :

Nombre de premières places pour Caro	9	11	13	15
Équation portant sur le total des points obtenus	$a + 2b = 18$	$a + 2b = 17$	$a + 2b = 16$	$a + 2b = 15$
Équation portant sur le total des votants	$a + b = 11$	$a + b = 9$	$a + b = 7$	$a + b = 5$
Nombre de troisièmes places pour Caro	7	8	Pas de solution	Pas de solution

Deux hypothèses restent envisageables. Ali ayant été classé 4 fois troisième, il reste 16 places de troisième à répartir entre Bela et Caro, Bela en obtenant davantage que Caro. Caro a donc été classée 9 fois première, 4 fois deuxième et 7 fois troisième.

Exercice 4 du concours ES, L, STMG
Les cases rouges

1. Un exemple de tableau à 7 lignes et 7 colonnes dans lequel aucune ligne ne contient le même nombre de cases rouges :

1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	1
3	4	5	6	7	1	2
4	5	6	7	1	2	3
5	6	7	1	2	3	4
6	7	1	2	3	4	5
7	1	2	3	4	5	6

2. *a.* Dire qu'une ligne ne contient que des cases rouges, c'est dire que, sur cette ligne, tous les nombres inscrits sont strictement supérieurs à 1. Mais alors, où est le 1 ?

2. *b.* Dire que deux lignes ne contiennent aucune case rouges, c'est dire que ces deux lignes contiennent les nombres de 1 à *n* dans l'ordre naturel et sont donc identiques. Ce n'est pas conforme à la règle.

3. *a.* Un exemple de tableau à 7 lignes et 7 colonnes dont toutes les lignes contiennent 3 cases rouges :

7	6	5	4	3	2	1
1	7	6	5	4	3	2
2	1	7	6	5	4	3
3	2	1	7	6	5	4
4	3	2	1	7	6	5
5	4	3	2	1	7	6
6	5	4	3	2	1	7

3. *b.* Dans un tableau $n \times n$, le nombre total de cases rouges est la somme des entiers compris entre 1 et $n-1$. En effet, le nombre n ne peut se trouver qu'une seule fois dans la colonne n, il se trouve donc $n-1$ fois dans une colonne de numéro inférieur, donc dans une case rouge ; cela arrive une fois de moins pour $n-2$, etc. Le nombre total de cases rouges est donc

Si on veut qu'il y en ait le même nombre sur chaque ligne, ce nombre est un diviseur de … si on peut dire, car cela ne peut éventuellement se produire que si $n-1$ est pair, et donc n impair. Ce n'est donc pas possible pour un tableau 2014×2014.