MINISTÈRE DE
L'ÉDUCATION NATIONALE

MINISTÈRE DE
L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

Olympiades académiques de mathématiques

Mercredi 20 mars 2013

Classes de premières ES, L, STMG, STD2A

Durée de l'épreuve : 4 heures.

Les calculatrices sont autorisées.

Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à faire figurer sur les copies les résultats, même partiels, auxquels ils sont parvenus, et les idées qui leur sont venues.

INVENTEURS DU MONDE NUMÉRIQUE

partenaire de l'académie de Versailles

Exercice 1 (Exercice proposé par la cellule nationale)

Les nombres Harshad

Un entier naturel non nul est un **nombre Harshad** s'il est divisible par la somme de ses chiffres.

Par exemple, $n = 24$ est un nombre Harshad car la somme de ses chiffres est $2 + 4 = 6$, et 24 est bien divisible par 6.

1. *a.* Montrer que 364 est un nombre Harshad.

b. Quel est le plus petit entier qui ne soit pas un nombre Harshad ?

2. *a*. Donner un nombre Harshad de 4 chiffres.

b. Soit n un entier non nul. Donner un nombre Harshad de n chiffres.

3. *a*. Montrer que 110, 111, 112 forment une liste de trois nombres Harshad consécutifs.

b. En insérant judicieusement le chiffre 0 dans l'écriture décimale des nombres précédents, construire une autre liste de trois nombres Harshad consécutifs.

c. Justifier l'existence d'une infinité de listes de trois nombres Harshad consécutifs.

4. *a*. Soit $A = 30 \times 31 \times 32 \times 33$. Calculer la somme des chiffres de A.

b. En déduire que 98 208 030, 98 208 031, 98 208 032 et 98 208 033 forment une liste de quatre nombres Harshad consécutifs.

c. Justifier l'existence d'une infinité de listes de quatre nombres Harshad consécutifs.

5. *a.* En s'inspirant de la question 4, trouver une liste de cinq nombres Harshad consécutifs.

b. Justifier l'existence d'une infinité de listes de cinq nombres Harshad consécutifs.

6. *a* Soit i un chiffre compris entre 0 et 8.

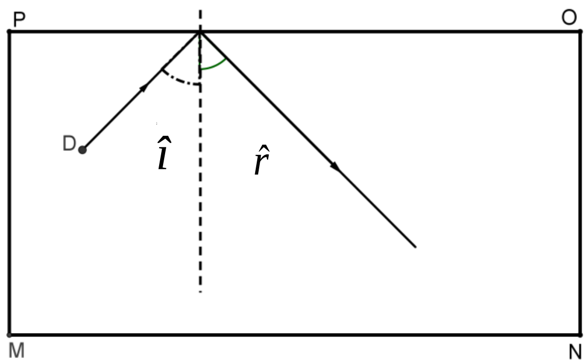
Soit p un entier dont le chiffre des dizaines est i et le chiffre des unités est 9.

Montrer que soit la somme des chiffres du nombre p soit celle de $p + 2$ est un nombre pair.
En déduire que p et $p + 2$ ne peuvent pas être tous les deux des nombres Harshad.

b. Existe-t-il une liste de 22 nombres Harshad consécutifs ?

Exercice 2 (Exercice proposé par la cellule nationale)

Un billard rectangulaire



On considère un billard de forme rectangulaire, de longueur 300 cm et de largeur 160 cm dont les boules sont assimilées à des points.

Entre deux rebonds toutes les trajectoires sont rectilignes.
Lorsque la boule atteint l'un des bords (rails) du billard, elle y rebondit suivant les règles de la physique des chocs élastiques : l'angle d'incidence   étant égal à l'angle de réflexion   , comme sur la figure ci-contre (.

1. On frappe une boule placée au milieu du rail [MN].

a. Quel point du rail [PO] peut-on viser pour que la boule atteigne le point N en une bande (c'est-à-dire avec un seul rebond) ?

b. Quel point du rail [PO] peut-on viser pour que la boule atteigne en une bande le milieu du rail [NO] ?

c. Quel point du rail [NO] peut-on viser pour que la boule revienne à son point de départ en trois bandes (c'est-à-dire après exactement trois rebonds) ?

2. On frappe une boule placée en un point quelconque du rail [MN].

a. Est-il possible d'atteindre en une bande n'importe quelle boule placée sur la surface de jeu ?

b. Est-il toujours possible de la frapper de sorte qu'elle revienne en trois bandes à son point initial ?

Exercice 3 (Exercice proposé par la cellule académique)

Quand les carrés sont partis…

On écrit à la suite les entiers naturels qui ne sont pas des carrés parfaits : 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, etc.

Quel est le 2 013$^{\text{ème}}$ nombre écrit ?

Exercice 4 (Exercice proposé par la cellule académique)

Les petits papiers

On dispose de 5 morceaux de papier.

On choisit un ou plusieurs de ces papiers, et on découpe chacun d'eux en 5 nouveaux morceaux. On obtient ainsi un nouvel ensemble de morceaux de papier (ceux qui n'ont été découpés et ceux produits par la découpe).

On recommence l'opération (choix d'au moins un papier, découpe en 5 des papiers choisis, rassemblement) autant de fois qu'on veut.

1. Peut-on obtenir 17 morceaux de papier ?

2. Peut-on obtenir 33 morceaux de papier ?

3. Peut-on obtenir 2 013 morceaux de papier ?