Exercice 3 Concours S La devinette de Clara

Considérons les nombres inconnus rangés dans l'ordre décroissant : $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$. Ces inégalités en entraînent d'autres : $a+b \geqslant a+c \geqslant a+d$, $b+c \geqslant b+d$, etc.

On peut écrire les deux chaînes d'inégalités : $\begin{cases} a+b \geqslant a+c \geqslant a+d \geqslant b+d \geqslant c+d \\ a+b \geqslant a+c \geqslant b+c \geqslant b+d \geqslant c+d \end{cases}$.

Dans lesquelles on voit l'importance de l'ordre relatif de $b+c$ et $a+d$

1. Supposons que $b+c$ et $a+d$ font partie des données

Dans l'ordre décroissant des sommes données, ces deux sommes occupent alors les deuxième et troisième rangs ou les troisième et quatrième. La somme $a+b+c+d$ est, dans le premier cas, égale à 5 et dans le second égale à 3. La somme de deux autres des nombres donnés doit elle aussi représenter $a+b+c+d$, mais on constate dans chaque cas qu'aucune des sommes deux à deux des nombres restants de la liste n'est égale à 5 (respectivement à 3).

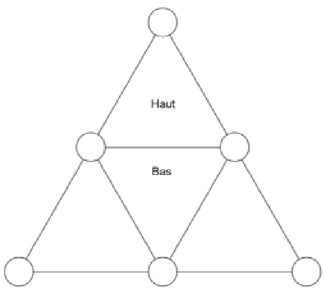
2. Supposons que $b+c$ et $a+d$ ne font pas tous les deux partie des données

La somme $a+b+c+d$ s'écrit $(a+b)+(c+d)$ et aussi $(a+c)+(b+d)$. Elle est égale à 4. Comme $a+d$ (ou $b+c$) est égal à 2, on en déduit que la somme manquante est aussi 2.

Finalement $a=\frac{7}{2}$, $b=\frac{5}{2}$, $c=-\frac{1}{2}$, $d=-\frac{3}{2}$.

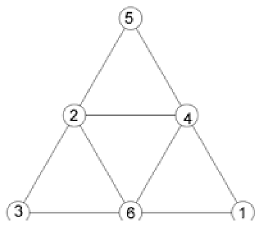
Exercice 3 Concours S Somme de sommets

Première partie

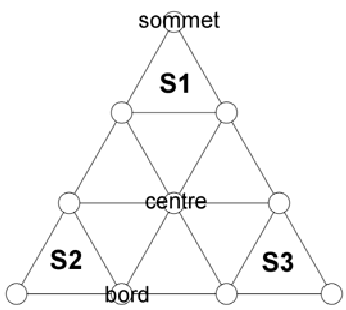


1. Les triangles marqués Haut et Bas de la figure ci-contre ont deux sommets en commun. Les sommes à y inscrire diffèrent de la différence des nombres placés en leurs sommets non communs. Ceux-ci sont distincts. La réponse est donc négative.

2. Une condition nécessaire est que les nombres inscrits aux sommets non communs des trois paires de triangles adjacents diffèrent au maximum de 1. La figure de droite fournit un exemple.



Deuxième partie



1. Si le nombre 10 occupe la position marquée « centre », il participe à six sommes, toutes supérieures à 12. S'il occupe une des six positions « bord », il participe à trois sommes supérieures à 12. Il participe à une seule somme s'il occupe une des trois positions « sommet ». Le même raisonnement vaut pour le nombre 9 (en remplaçant supérieures par supérieures ou égales). Ce raisonnement n'est pas concluant pour le nombre 8, car la somme 8 + 1 + 2 est inférieure à 12. Mais en position « centre » ou « bord », 8 apporte encore au moins une somme supérieure ou égale à 12. Si on place 8 dans la dernière position « sommet » disponible, avec 1 et 2 comme compléments, la somme des nombres inscrits dans les six triangles ayant un sommet en position « centre » est au moins égale à $6\times3+2\times(1+2+4+5+6+7)$, c'est-à-dire 68. La moyenne des six sommes est supérieure à 11, donc l'une des six est supérieure ou égale à 12.

2. Si le nombre 10 occupe la position « centre », la somme des nombres inscrits dans les six triangles marqués 10 à leur sommet commun est au minimum $6\times10+2\times(1+2+3+4+5+6)$, c'est-à-dire 102. Trois des nombres inscrits dans les triangles concernés ont alors une somme supérieure à 51. De même, **si le nombre 9 occupe la position « centre »**, la somme des nombres inscrits dans les six triangles marqués 9 à leur sommet commun est au minimum $6\times9+2\times(1+2+3+4+5+6)$, c'est-à-dire 96, et trois des nombres inscrits dans ces six triangles ont une somme supérieure ou égale à 48.

Si le nombre n occupe la position marquée centre, les autres nombres apparaissent chacun une fois dans la somme $S1+S2+S3$, qui est égale à $\sum_{k=1}^{k=10} k-n$, c'est-à-dire $55-n$. **Pour n inférieur ou égal à 7, la somme $S1+S2+S3$ est donc supérieure à 48.**

Reste à examiner le cas où 8 est au centre. Si 10 occupe une position « bord », deux triangles ont des sommets communs marqués 8 et 10. La somme des nombres inscrits sur les deux est supérieure ou égale à 39. Comme le nombre inscrit sur au moins un autre triangle est supérieur à 9, trois des triangles montrent des sommes dont la somme est supérieure ou égale à 48. Reste à examiner le cas où le nombre 10 occupe un sommet. Si le nombre 9 occupe une position « bord », la somme des nombres inscrits sur trois triangles, les deux qui ont 8 et 9 occupant leurs sommets communs et un dont un sommet est marqué 10, est supérieure ou égale à $2\times(8+9)+10+1+2+3$, c'est-à-dire 50. Le nombre 9 occupe donc un sommet… mais alors, trois triangles portent à leurs sommets les nombres 10, 9, 8 et six nombres distincts parmi 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7. La somme des nombres inscrits sur ces trois triangles est supérieure à $10+9+8+6+5+4+3+2+1$, c'est-à-dire 48.

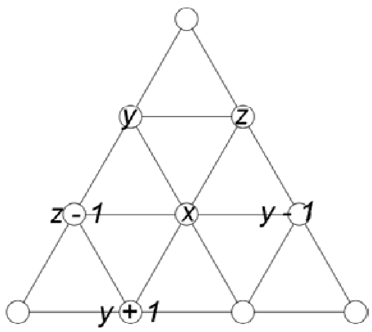
3. *a.* 1. Si on souhaite obtenir des sommes toutes paires et que le nombre placé au centre est pair, ses voisins doivent être tous de même parité. Cela fait six nombres de même parité parmi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10. Impossible.

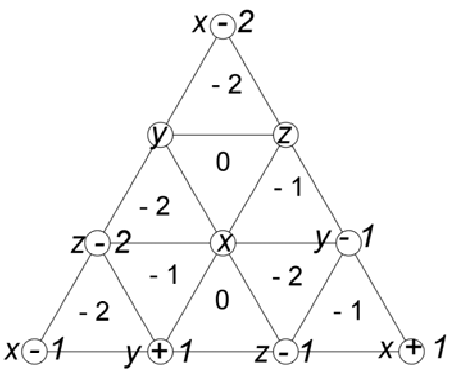
a. 2. Si le nombre placé au centre est impair, ses voisins doivent être de parité alternée (un pair, un impair par triangle), mais alors les trois sommets sont occupés par des nombres impairs, cela fait sept nombres impairs parmi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10. Impossible.

b. 1. Si on souhaite obtenir des sommes toutes impaires et que le nombre placé au centre est impair, c'est la situation du *a.* 1.

b. 2. Si le nombre placé au centre est pair, c'est la situation du *a.* 2.

4. Partant du triangle dont les sommets sont marqués x, y, et z, on marque les sommets des triangles ayant avec lui un côté commun. Si $x+y+z$ est la plus forte somme, les sommes voisines sont $x+y+z-1$, et chaque fois deux des trois termes sont connus. La figure ci-contre montre qu'alors les trois positions « sommet » sont occupées par le même $x-1$. Impossible. Échanger – 1 et + 1 fournit le même résultat si on suppose que la somme $x+y+z$ est la plus petite.





5. On a utilisé dans la figure ci-contre quatre nombres consécutifs, $x-2,\ x-1,\ x,\ x+1$, trois nombres consécutifs $y-1,\ y,\ y+1$ et trois autres nombres consécutifs $z-2,\ z-1,\ z$ (cette répartition est due au choix de départ). On peut donc éviter les chevauchements.

N.B. Les 0, – 1 et – 2 figurent les différences par rapport à la somme $x+y+z$.

Exercice 3 Concours ES Quand les carrés sont partis…

Si on écrit la suite des entiers non nuls jusqu'au carré de 46, on obtient : 1, 2, 3, …, 2 113, 2 114, 2 115, 2 116. Cette suite comporte 2 116 termes, dont 46 sont des carrés. Quand on prélève ces carrés, il reste 2 116 – 46, c'est-à-dire 2 070 nombres. Pour aller jusqu'au 2 013$^{\text{ème}}$, il faut enlever les 2 070 – 2 013 derniers.

Les nombres à ôter sont les 56 prédécesseurs de 2 115 et 2 115 lui-même. Le dernier nombre écrit est donc 2 058.

On peut observer que 2 058 = 2013 + 45. On aurait aussi pu trouver 2 058 en ajoutant à 2 013 les 45 carrés « partis ».

Exercice 4 Concours ES Les petits papiers

1. Pour obtenir 17 papiers, il suffit de découper en 5 trois de ces papiers.

2. Pour obtenir 33 papiers, il faudrait en avoir eu 29 et en avoir découpé un, ou 25 et découpé deux, ou 21 et découpé trois, ou 17 et découpé quatre, ou 13 et découpé cinq, ou 9 et découpé 6. On peut se ramener à 9, car 29 est accessible à partir de 25 ou 21 ou 17 ou 13 ou 9, etc.

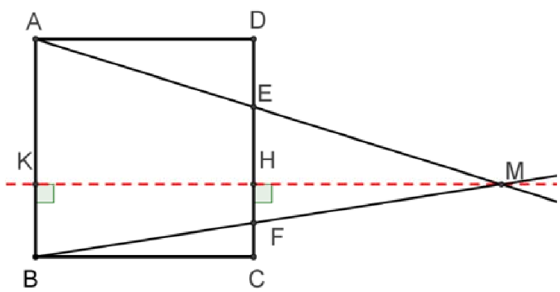
Pour obtenir 9 papiers à partir de 5, il suffit d'en découper un. Donc obtenir 33 est possible.

Chaque opération de découpage produit 4 papiers de plus, qu'elle soit ou non concomitante à une autre. On n'est limité que par le nombre de papiers qu'on possède au moment de ces opérations.

3. $2013 = 4 \times 502 + 5$

À partir de 5 papiers, on peut en obtenir 2 013 après 502 opérations de découpage (qui, nécessairement, ne sont pas simultanées).

Exercice 3 Concours STI2D Un triangle qui prend l'aire



Appelons H le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur (EF) et K le point d'intersection de cette perpendiculaire avec (AB).

L'aire du triangle MEF est $\frac{2}{3}\cdot$: $\frac{1}{2}\text{MH} \times \text{EF} = \frac{2}{3}\cdot$

D'autre part, le triangle MAB est un agrandissement du triangle MEF (si on préfère, on utilise les triangles MEF et MAB, en situation de Thalès et les triangles MEH et MAK, en situation de Thalès). D'où l'égalité des rapports : $\frac{\text{EF}}{\text{AB}} = \frac{\text{MH}}{\text{MK}}$, qui peut encore être écrite $\text{EF} = \frac{\text{MH}}{\text{MH}+1}\cdot$

En remplaçant MH par $\frac{4}{3\text{EF}}$, on obtient : $\text{EF} \times \left(4 + 3\text{EF}\right) = 4$.

Cette équation s'écrit : $\left(\text{EF} + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{16}{9} = 0$. Sa solution positive est $\frac{2}{3}\cdot$

Exercice 4 Concours STI2D 17 et 23 en leitmotiv

Les multiples de 17 non nuls et inférieurs à 99 sont : 17, 34, 51, 68, 85.

Les multiples de 23 non nuls et inférieurs à 99 sont : 23, 46, 69, 92.

La suite ne peut commencer par 1, car aucun des nombres ci-dessus ne commence par 7.

La suite ne peut commencer per 5, car après 51 vient 17…

La suite ne peut commencer par 7.

La suite ne peut commencer par 8, car après 85 viennent 51 et 17.

Si la suite commence par 6, elle ne peut se poursuivre par 8, compte tenu de ce qui précède.

La suite commençant par 6 et qui ne s'arrête pas est périodique : 6, 9, 2, 3, 4, 6, etc.

Il en est de même de la suite commençant par 2 : 2, 3, 4, 6, 9, 2, etc.

Il en est de même de la suite commençant par 3 : 3, 4, 6, 9, 2, 3, etc.

Et de celle commençant pat 4 : 4, 6, 9, 2, 3, 4, etc.

Et de celle commençant par 9 : 9, 2, 3, 4, 6, 9, etc.

Chacune des suites possibles a une période de 5 termes. Le 2 011$^{\text{ème}}$ terme est donc égal au premier, et on pourrait associer les 2 012$^{\text{ème}}$ et 2013$^{\text{ème}}$ aux deuxième et troisième, le quatrième étant le 2 009$^{\text{ème}}$ et le cinquième le 2 010$^{\text{ème}}$. Mais comme il y a cinq suites possibles, toute permutation circulaire de 6, 9, 2, 3, 4 est possible.