Exercice 1 (proposé par la cellule nationale)

Nombres *digisibles*

On dit qu'un nombre entier est *digisible* lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- aucun de ses chiffres n'est nul ;
- il s'écrit avec des chiffres tous différents ;
- il est divisible par chacun d'eux.

Par exemple, **24** est *digisible* car il est divisible par **2** et par **4**, **324** est *digisible* car il est divisible par **3**, par **2** et par **4**, **32** n'est pas *digisible* car il n'est pas divisible par **3**.

On rappelle qu'un nombre entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

1. Proposer un autre nombre *digisible* à deux chiffres.

2. Proposer un nombre *digisible* à quatre chiffres.

3. Soit n un entier *digisible* s'écrivant avec un 5.

a. Démontrer que 5 est le chiffre de ses unités.

b. Démontrer que tous les chiffres de n sont impairs.

c. Démontrer que n s'écrit avec au plus quatre chiffres.

d. Déterminer le plus grand entier *digisible* s'écrivant avec un 5.

4. Soit n un entier *digisible* quelconque.

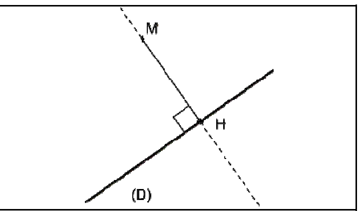
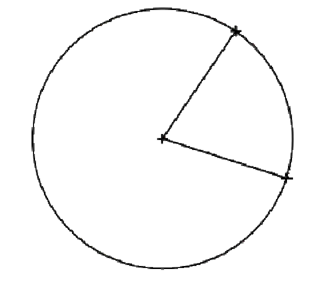
a. Démontrer que n s'écrit avec au plus sept chiffres.

b. Si n s'écrit avec sept chiffres, dont un 9, déterminer les chiffres de n.

c. Déterminer le plus grand entier *digisible*.

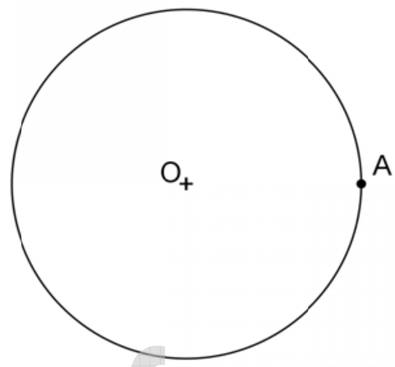
Exercice 2 (proposé par la cellule nationale)

Plus près, plus loin

Rappels *On appelle* ***distance entre un point M et une droite (D)*** *la distance MH, où H est le point d'intersection de (D) avec la droite perpendiculaire à (D) passant par M.*	
Dans la figure ci-contre, si le rayon du disque est R, et si l'angle du secteur angulaire grisé mesure α (en degrés), alors ***l'aire de la portion de disque*** *grisée vaut* $\dfrac{2\pi R\alpha}{360}$. *Dans la partie II de l'exercice, on considèrera la distance d'un point M à* ***un segment [****BC] comme étant la distance du point M à la droite (BC).*	

Partie I

Soit C un cercle de centre O, A un point de ce cercle et D le disque délimité par ce cercle.



1. Reproduire la figure, et représenter l'ensemble des points du disque équidistants de O et de A.

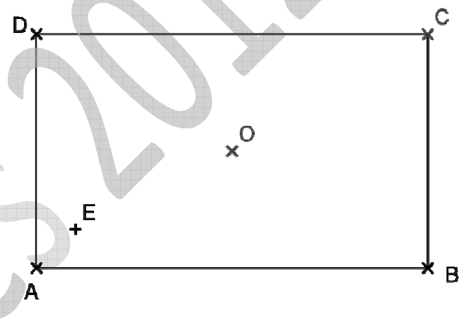
2. Hachurer l'ensemble des points du disque plus proches de O que de A.

3. Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable sur la surface du disque D.

Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de A ?

Partie II

Soit ABCD un rectangle de longueur AB = 20 cm et de largeur BC = 12 cm, de centre O.
Soit E un point situé à l'intérieur du rectangle, proche de A, à 2 cm de chaque bord (comme sur la figure ci-après, qui n'est toutefois pas à l'échelle).
Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable à l'intérieur du rectangle ABCD.



1. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AD] ?

2. *a.* Reproduire le rectangle, et représenter l'ensemble des points intérieurs au rectangle et équidistants des côtés [AB] et [BC].

b. Hachurer l'ensemble des points intérieurs au rectangle et plus proches du côté [BC] que du côté [AB].

c. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AB] ?

3. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [AB] que des trois autres côtés [BC], [CD] et [DA] ?

4. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de E ?

5. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que des quatre sommets A, B, C et D ?

Exercice 3 (proposé par la cellule académique)

Mille et une lampes

Soit n un entier supérieur ou égal à 3.

Sur un cercle, on dispose n lampes, régulièrement espacées, entre lesquelles sont disposés n commutateurs. Chaque commutateur a deux positions, « I » et « O ». Toute lampe est éteinte si elle se trouve entre deux commutateurs de même position, allumée si elle se trouve entre deux commutateurs placés dans des positions contraires.

1. Si $n = 8$, est-il possible que toutes les lampes soient allumées ? Si $n = 5$, est-il possible que toutes les lampes soient allumées ?

Tournez la page S.V.P.

2. Si $n = 2012$, déterminer le nombre maximum de lampes qui peuvent être allumées, et donner les positions des commutateurs correspondants. Même question avec $n = 2011$.

3. Si $n = 2012$, est-il possible que la moitié exactement des lampes soient allumées ? Même question avec $n = 10$.

4. Dans cette question, on suppose que $n = 2012$.

a. Est-il possible d'allumer exactement 4 lampes et que celles-ci se trouvent aux sommets d'un carré ?

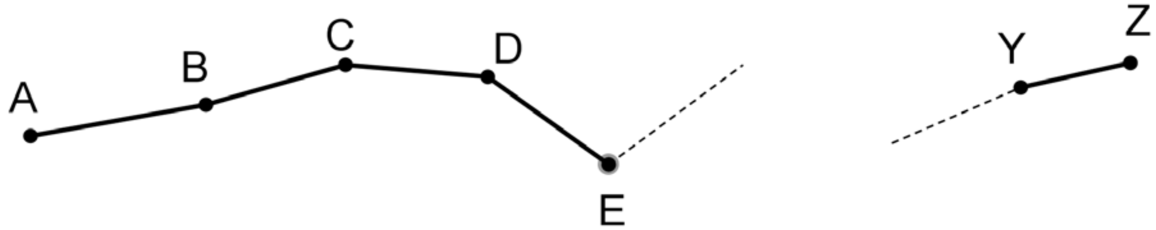
b. Est-il possible d'allumer exactement 8 lampes et que celles-ci se trouvent aux sommets d'un hexagone régulier ?

c. Est-il possible d'allumer exactement 503 lampes et que celles-ci se trouvent aux sommets d'un polygone régulier à 503 côtés ?

Exercice 4 (proposé par la cellule académique)

Inauguration

Olympiade-Ville va bientôt avoir sa ligne de métro. La longueur de trois sections (*) consécutives devra toujours être inférieure ou égale à 16 km et la longueur de cinq sections consécutives devra toujours être supérieure ou égale à 27 km.



Combien cette ligne a-t-elle de stations ?

(*) *Une section est un intervalle entre deux stations de métro.*