Mille et une lampes

Un problème de parité

Dans les conditions indiquées par l'énoncé, le nombre de lampes allumées est égal au nombre de changements de position observés lorsqu'on suit la liste des n+1 interrupteurs, du numéro 1 au numéro n puis au numéro 1. Comme les deux bouts de la chaîne sont dans la même position, le nombre de changements de position est pair. Le nombre de lampes allumées ne saurait donc qu'être pair.

Cette observation permet de répondre aux questions 1., 2. pour n = 2 012, 3. pour n = 10 et 4. *c*

Des problèmes de répartition

Question 2, cas n = 2 011

On peut allumer 2 010 lampes. Les 2 011 interrupteurs qu'elles séparent sont dans des positions alternativement ouverte et fermée. Aux deux bouts de la chaîne, les interrupteurs sont, par exemple , en position O. Ils sont situés de part et d'autre de la 2 011ème lampe, éteinte.

Question 3, cas n = 2 012

On allume 1 006 lampes consécutives. Les 1 007 interrupteurs qu'elles séparent sont dans des positions alternativement ouverte et fermée. Aux deux bouts de la chaîne, les interrupteurs sont, par exemple, en position O. Si tous les autres interrupteurs sont eux aussi en position O, il n'y a que 1 006 lampes allumées.

Question 4. *a.*

Entre deux lampes allumées consécutives, il y a 503 interrupteurs dans la même position et 502 lampes éteintes. Ce bloc joue le rôle d'un unique interrupteur dans le cas n = 4. Comme 4 est pair, allumer seulement quatre lampes aux sommets d'un carré est possible. Cet argument – analogie entre un bloc de lampes éteintes séparées par des interrupteurs tous dans la même position – aurait pu servir pour 503… si 503 était pair.

Question 4. *b.* Là, c'est un problème de divisibilité. 2 012 n'est pas multiple de 8.