Eléments de solution

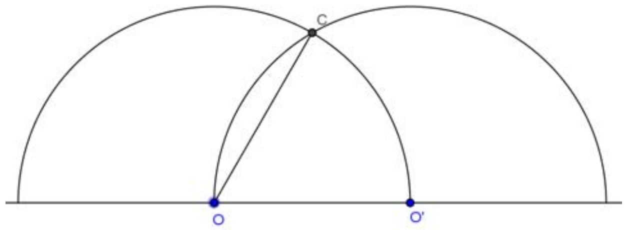
Séries S et STI

Exercice 1 : Essuie-glaces

Cet exercice a été choisi par la cellule nationale. Les éléments de solution qui suivent ont été fournis par l'académie qui a proposé cet exercice.

1. L'aire demandée en cm^2 est $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left(\pi.60^2 - \pi 15^2\right) = \frac{1}{2}\pi.3375$ soit en valeur au cm² : $\mathcal{A} = 5301$.

2. Soit C l'intersection des deux demi-cercles. Calculons L'aire du triangle équilatéral $OO'C$ de côté de longueur R, et donc de hauteur $R\frac{\sqrt{3}}{2}$: $A_1 = \frac{1}{2}\left(R \times \frac{\sqrt{3}}{2}R\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}R^2$.



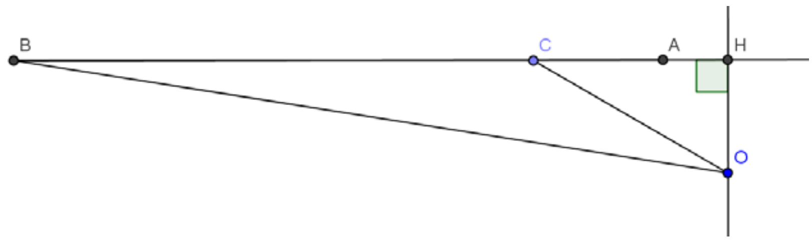
Calculons l'aire du secteur angulaire d'angle $\widehat{O'OC}$ de mesure $\frac{\pi}{3}$ en radians, qui est aussi celle du secteur angulaire d'angle $\widehat{COO'}$: $A_2 = \frac{\pi R^2}{6}$.

Ainsi l'aire de le portion de plan limitée par la corde [OC] et l'arc $\widehat{OC}$ sera : $A_2 - A_1$.
L'aire de la portion de plan commune aux deux demi-disques sera donc $A = A_2 + A_2 - A_1 = 2A_2 - A_1$

Donc $A_3 = \frac{\pi}{3}R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}R^2$.
L'aire essuyée par les deux balais est donc celle d'un cercle de rayon R privée de A_3 soit

$$\mathcal{A} = \pi R^2 - \left(\frac{\pi}{3}R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}R^2 - \right) = \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2 \qquad \boxed{\mathcal{A} = \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2}$$

3.



1. $\sin\widehat{OCH} = \sin 30° = \frac{1}{2}$ donc $\frac{OH}{OC} = \frac{1}{2}$ soit $OH = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$.

De même $\frac{HC}{OC} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $HC = \frac{\sqrt{3}}{2}a\sqrt{3} = \frac{3}{2}a$. Enfin d'après le théorème de Pythagore dans le triangle HOA rectangle en H,

$$OA^2 = HA^2 + HO^2 = \left(HC - CA\right)^2 + HO^2 = \left(\frac{3}{2}a - a\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} = a^2 .$$

Ainsi $AO = AC$ et donc $\boxed{\text{le triangle } ACO \text{ est isocèle en A.}}$

b. L'angle dont a tourné le dispositif est la mesure de l'angle $\widehat{MOM'}$. En degré elle vaut $180 - \widehat{XOM}$ avec X comme sur le dessin. Or les angles $\widehat{XOP}$ et $\widehat{OPM}$ sont alternes internes, et le triangle MOP est isocèle ; on en déduit donc que $\widehat{MOX} = 2 \times 30 = 60°$. Donc l'angle géométrique $\widehat{MOM'}$ a pour mesure 180-60= $\boxed{120°}$.

La portion de plan essuyée est celle qui est limitée par les segments [MN] et [M'N'] et les arcs $\widehat{MM'}$ et $\widehat{NN'}$.
Soient T et T' les intersections du cercle de centre O passant par M et les segments [ON] et [ON']. Le cercle étant invariant par la rotation et le segment [ON] ayant pour image [ON'], T a donc pour image T'. Les points MTP ont respectivement pour images M' T' N', et la conservation des aires par rotation montre que la portion

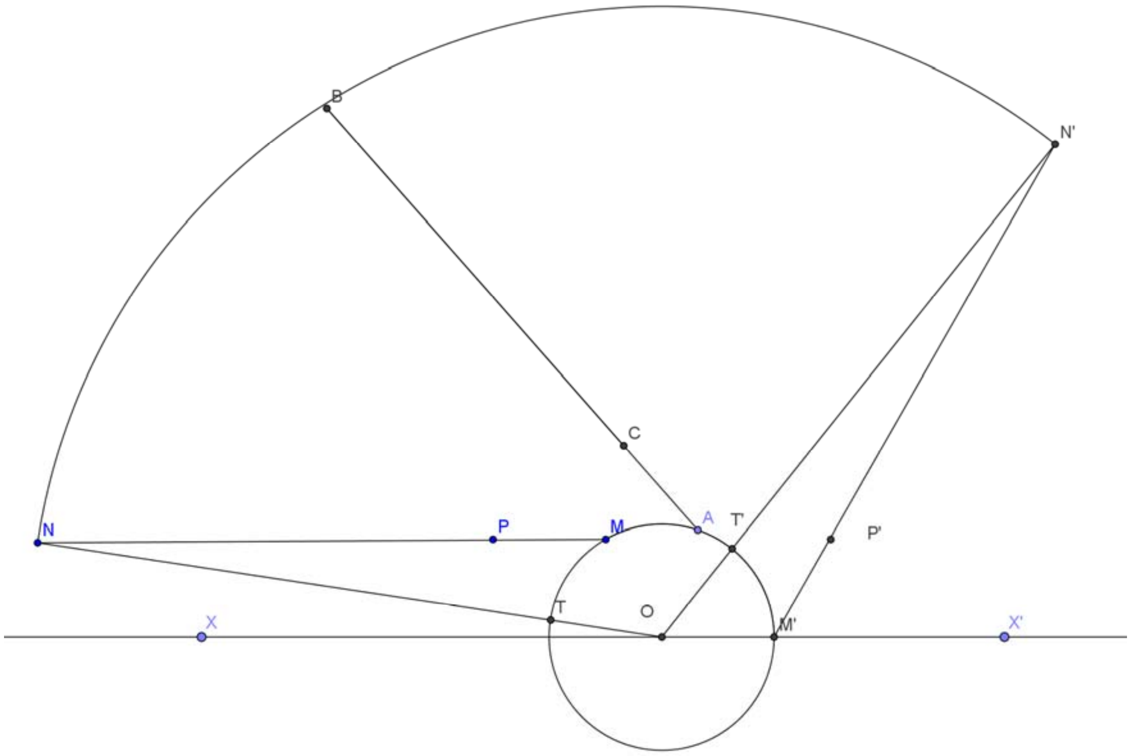
de plan limitée par [MN], [NT] et l'arc $\overset{\frown}{MT}$ a la même aire que celle limitée par [$M'N'$] [$N'T'$] et l'arc $\overset{\frown}{M'T'}$.
On peut dire aussi que le système étant rigide, les triangles OMN et OM'N' sont isométriques.
Ainsi la portion essuyée a la même aire que celle qui est limitée par les segments [NT] et [$N'T'$] et les arc de cercle $\overset{\frown}{NN'}$ et $\overset{\frown}{TT'}$.

L'aire de cette portion de plan est donc $\mathcal{A} = \frac{1}{3}\left(\pi.ON^2 - \pi.OT^2\right) = \frac{\pi}{3}\left(OB^2 - OA^2\right)$

Or, $OA^2 = a^2$ et d'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OBH,

$$OB^2 = OH^2 + HB^2 = OH^2 + \left(HC + CB\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2} + 4a\right)^2 = \left(\frac{3}{4} + \frac{121}{4}\right)a^2 = 31a^2$$

L'aire cherchée est donc $\mathcal{A} = \frac{\pi}{3}\left(31a^2 - a^2\right) = \frac{\pi}{3} \times 30a^2 = 10\pi a^2$ $\boxed{\mathcal{A} = 10\pi a^2}$



Exercice 2 : Le singe sauteur

Cet exercice a été choisi par la cellule nationale. Les éléments de solution qui suivent ont été fournis par l'académie qui a proposé cet exercice.

1. Le nombre 4 est atteignable car 1+ 2 – 3 + 4 = 4.
2. Le singe n'a le choix : 1+ 2 – 3 + 4 et … il est bloqué !!
3. Le nombre 9 est atteignable car on a 1 + 2 + 3 – 4 + 5 – 6 + 7 – 8 + 9 = 9, sans jamais sortir de l'intervalle [0 , 9].
4. Les exemples précédents traitent les carrés 4 et 9. Le cas échéant la recherche pour 16 peut donner

1 + 2 + 3 + 4 – 5 + 6 – 7 + 8 – 9 + 10– 11 + 12 – 13 + 14 – 15 + 16, en remarquant que l'on ne sort jamais de l'intervalle [0, 16]. L'observation des sommes produites peut amener la solution générale :

$$1 + 2 + 3 + \ldots.. + n - (n+1) + (n+2) - (n+3) + (n+4)\ldots\ldots\ldots - (n^2 - 1) + n^2 =$$

$$\frac{n(n+1)}{2} + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n^2 - n}{2} = n^2$$

d'où n^2 est atteignable. Les seules difficultés sont le comptage des termes valant 1 et la vérification du fait que l'on reste bien dans l'intervalle [0 ; n^2].

5. Si le nombre n est atteignable, il existe des a_i valant 1 ou −1 telles que $1+2a_2+3a_3+......+(n-1)a_{n-1}=0$. Dans cette somme on sépare les termes positifs dont on note la somme S_+ des termes négatifs dont on note la somme S_-. On a alors : $S_+ = S_-$ On calcule ensuite :

$$1+2+3+.......+(n-1)=S_+-S_-=2S_+$$

On en déduit que : $\dfrac{(n-1)n}{2}=2S_+$ d'où $n(n-1)=4S_+$ et donc 4 divise le produit $n(n-1)$. Donc n est de la forme $4k$ ou $4k+1$. Par exemple 18 n'est pas atteignable.

La réciproque est fausse puisque 5 n'est pas atteignable.

6. L'idée est de transformer une configuration de signes + − en − +, cela va ajouter 2 au nombre N. Ensuite on complète par la suite $-(N+1)+(N+2)-(N+3)+(N+4)$ et l'on trouve $N+4$. On note $S(i)$ la somme partielle des i-premiers termes. Remarquons que la séquence donnant N se termine par $-(N-1)+N$. La séquence commence par 1+ 2 + 3 et le premier signe – apparaît en position $i+1$. Alors $S(i-1) \geq i$, car $S(3) \geq 4$. On change alors la sous-séquence $i-(i+1)$ en $-i+(i+1)$ ce qui est possible. On ajoute la séquence $-(N+1)+(N+2)-(N+3)+(N+4)$ ce qui assure que $N+4$ est atteignable.
Question subsidiaire :
est-il vrai que les nombres de la forme $N = 4k$ ou $4k+1$, hormis 5, 8, 12, 17 sont atteignables ?

Exercice 3 : Fabrique de triplets

Préliminaires

1. Pour tous réels a et b : $xy+1=x+y+(x-1)(y-1)$

Le produit figurant au second membre est positif strictement, par hypothèse. D'où le résultat.

2. Cette fonction est strictement croissante.

Recherche de triplets

3. Si a est supérieur ou égal à 1 alors b et c le sont aussi, et ils sont supérieurs ou égaux à leurs inverses, ce qui nie la condition imposée.

4. Le sens de variation de la fonction f et l'inégalité stricte $c>\dfrac{1}{ab}$ conduisent à $c-\dfrac{1}{c}>\dfrac{1}{ab}-ab$. L'inégalité $a+b+c<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ conduit à $c-\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-a-b$. On a donc : $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-a-b>\dfrac{1}{ab}-ab$. Mais a et b sont strictement inférieurs à 1 et, en appliquant le premier résultat préliminaire, on obtient :
$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-a-b=(a+b)\left(\dfrac{1}{ab}-1\right)<(ab+1)\left(\dfrac{1}{ab}-1\right)=\dfrac{1}{ab}-ab$,

Soit finalement $\dfrac{1}{ab}-ab<\dfrac{1}{ab}-ab$. Contradiction. Donc $b \geqslant 1$.

5. On cherche des triplets pour lesquels $b=1$.

L'inégalité de définition s'écrit $c-\frac{1}{c}<\frac{1}{a}-a$, ce qui, compte tenu du sens de variation de la fonction *f*, n'est possible que si $c<\frac{1}{a}$, mais l'inégalité $abc>1$ suppose le contraire. Il n'existe pas de tels triplets dans l'ensemble des solutions.

6. On souhaite trouver *c* vérifiant simultanément $a\leqslant b\leqslant c,\ c>\frac{1}{ab}$ et $c-\frac{1}{c}<\frac{1}{a}-a+\frac{1}{b}-b$.

En raison de la continuité et de la croissance de la fonction *f*, il revient au même de prouver qu'il existe un réel $c\geqslant b$ tel que $\frac{1}{ab}-ab<c-\frac{1}{c}<\frac{1}{a}-a+\frac{1}{b}-b$, ou encore que $\frac{1}{ab}-ab<b-\frac{1}{b}<a-\frac{1}{a}+b-\frac{1}{b}\cdot$

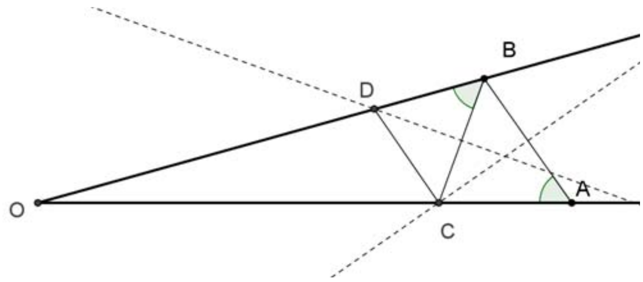
L'inégalité $\frac{1}{ab}-ab<b-\frac{1}{b}$ se réduit, après calculs, à $(1+a)(1-ab^2)<0$, qui résulte de l'hypothèse.

L'inégalité $b-\frac{1}{b}<\frac{1}{a}-a+\frac{1}{b}-b$ s'écrit $2\left(b-\frac{1}{b}\right)<\frac{1}{a}-a$. Or $2\left(b-\frac{1}{b}\right)<2\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)$ et $\left(\frac{1}{a}-a\right)-2\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{a}-2\right)$, quantité positive (le minimum de $x+\frac{1}{x}$ sur]0, 1] est 2).

7. Un triplet « limite » tel que celui-ci : $a=0,84$, $b=c=1,0911$ réalise $abc=1,000019...$ et $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-a-b-c=0,01148...$ La condition n'est donc pas nécessaire (ici $\frac{1}{\sqrt{a}}=1,091089...$)

Exercice 4 : Billard dans un angle

1. On écrit la somme des mesures des angles du triangle ABO, en tenant compte du fait que le triangle CBA est isocèle de sommet principal A :



$$2\alpha+\theta+\widehat{CBO}=180$$

Une condition nécessaire sur α est donc :

$$\alpha\leqslant 90-\frac{\theta}{2}$$

2. Le raisonnement est le même et conduit à $2(180-2\alpha-\theta)+\theta\leqslant 180$, qui peut être traduit en : $4\alpha\geqslant 180-\theta$, ou encore $\alpha\geqslant 45-\frac{\theta}{4}$.

3. La relation entre l'angle $\widehat{OMM'}$ et l'angle $\widehat{OM'M''}$ s'écrit : $x'=180-2x-\theta$. L'égalité de *x* et *x*' est obtenue pour $x=60-\frac{\theta}{3}$. Si on prend cette valeur pour valeur initiale, on peut construire des points ad libitum.

4. On passe d'un angle de mesure *x* au suivant, de mesure *x*' donnée par $x'=180-2x-\theta$. Calculons la différence entre *x*' et la valeur critique $60-\frac{\theta}{3}$:

$$x' - \left(60 - \frac{\theta}{3}\right) = 120 - 2x - \frac{2\theta}{3} = -2\left(x - \left(60 - \frac{\theta}{3}\right)\right)$$

Cette dernière égalité montre que la différence entre l'angle $\widehat{\mathrm{OM}_n\mathrm{M}_{n+1}}$ et la valeur critique $60 - \frac{\theta}{3}$ double à chaque pas. Si elle n'est pas initialement nulle, elle déborde au bout d'un certain nombre de constructions des valeurs admissibles. Le procédé n'est donc répétable ad libitum que si $\alpha = 60 - \frac{\theta}{3}$.

5. La condition précédente conduit à une suite de triangles isocèles ayant tous les mêmes angles à la base. Les égalités BC = AC, CD = DB, etc. montrent que la somme des segments « intérieurs » à l'angle est, à la limite, égale au périmètre du triangle OAB.

La longueur AO est la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme AC et de raison $\frac{1}{4\cos^2\alpha}$.

La somme des termes de cette suite est : $1 = \mathrm{AO} = \mathrm{AC}\dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{4\cos^2\alpha}} = \mathrm{AC}\dfrac{4\cos^2\alpha}{4\cos^2\alpha - 1}$.

On a donc $\mathrm{AC} = 1 - \frac{1}{4\cos^2\alpha}$.

De même, AB + BO est la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme AB et de raison $\frac{1}{4\cos^2\alpha}$.

On a donc $\mathrm{AB} + \mathrm{BO} = \mathrm{AB}\ \dfrac{4\cos^2\alpha}{4\cos^2\alpha - 1} = 2\,\mathrm{AC}\cos\alpha\dfrac{1}{\mathrm{AC}} = 2\cos\alpha$.

Le périmètre du triangle ABO est donc $\ell = 1 + 2\cos\alpha$.

Ce périmètre est $1 + \sqrt{2}$ lorsque $\alpha = \theta = 45$, c'est-à-dire lorsque le triangle ABO est rectangle et isocèle en B.