Eléments de solution

Séries L, ES, STG, BTn

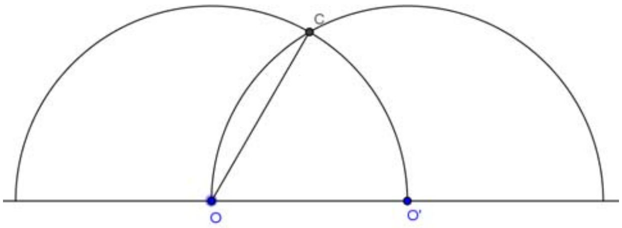
Exercice 1 : Essuie-glaces

Cet exercice a été choisi par la cellule nationale. Les éléments de solution qui suivent ont été fournis par l'académie qui a proposé cet exercice.

1) L'aire demandée en cm^2 est $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left(\pi.60^2 - \pi 15^2\right) = \frac{1}{2}\pi.3375$ soit en valeur arrondie au cm² : $\mathcal{A} = 5301$

2) Soit C l'intersection des deux demi-cercles. Calculons L'aire du triangle équilatéral $OO'C$ de côté de longueur R, et donc de hauteur $R\frac{\sqrt{3}}{2}$: A_1=

$\frac{1}{2}\left(R \times \frac{\sqrt{3}}{2} R\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} R^2$.



Calculons l'aire du secteur angulaire d'angle $\widehat{O'OC}$ de mesure $\frac{\pi}{3}$ en radians, qui est aussi celle du secteur angulaire d'angle $\widehat{COO'}$: $A_2 = \frac{\pi R^2}{6}$.

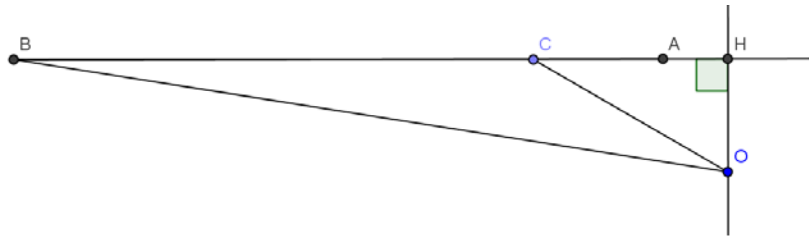
Ainsi l'aire de le portion de plan limitée par la corde [OC] et l'arc $\overset{\frown}{OC}$ sera : $A_2 - A_1$.
L'aire de la portion de plan commune aux deux demi-disques sera donc $A = A_2 + A_2 - A_1 = 2\,A_2 - A_1$

Donc $A_3 = \frac{\pi}{3} R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} R^2$.

L'aire essuyée par les deux balais est donc celle d'un cercle de rayon R privée de A_3 soit

$$\mathcal{A} = \pi R^2 - \left(\frac{\pi}{3} R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 - \right) = \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) R^2 \qquad \boxed{\mathcal{A} = \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) R^2}$$

3)



1. $\sin\widehat{OCH} = \sin 30° = \frac{1}{2}$ donc

$\frac{OH}{OC} = \frac{1}{2}$ soit $OH = \frac{1}{2} a\sqrt{3}$.

De même $\frac{HC}{OC} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

donc $HC = \frac{\sqrt{3}}{2} a\sqrt{3} = \frac{3}{2} a$. Enfin d'après le théorème de Pythagore dans le triangle HOA rectangle en H,

$$OA^2 = HA^2 + HO^2 = \left(HC - CA\right)^2 + HO^2 = \left(\frac{3}{2}a - a\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} = a^2 .$$

Ainsi $AO = AC$ et donc $\boxed{\text{le triangle } ACO \text{ est isocèle en A.}}$

b) L'angle dont a tourné le dispositif est la mesure de l'angle $\widehat{MOM'}$. En degré elle vaut $180 - \widehat{XOM}$ avec X comme sur le dessin. Or les angles $\widehat{XOP}$ et $\widehat{OPM}$ sont alternes internes, et le triangle MOP est isocèle ; on en déduit donc que $\widehat{MOX} = 2 \times 30 = 60°$. Donc l'angle géométrique $\widehat{MOM'}$ a pour mesure 180-60= $\boxed{120°.}$

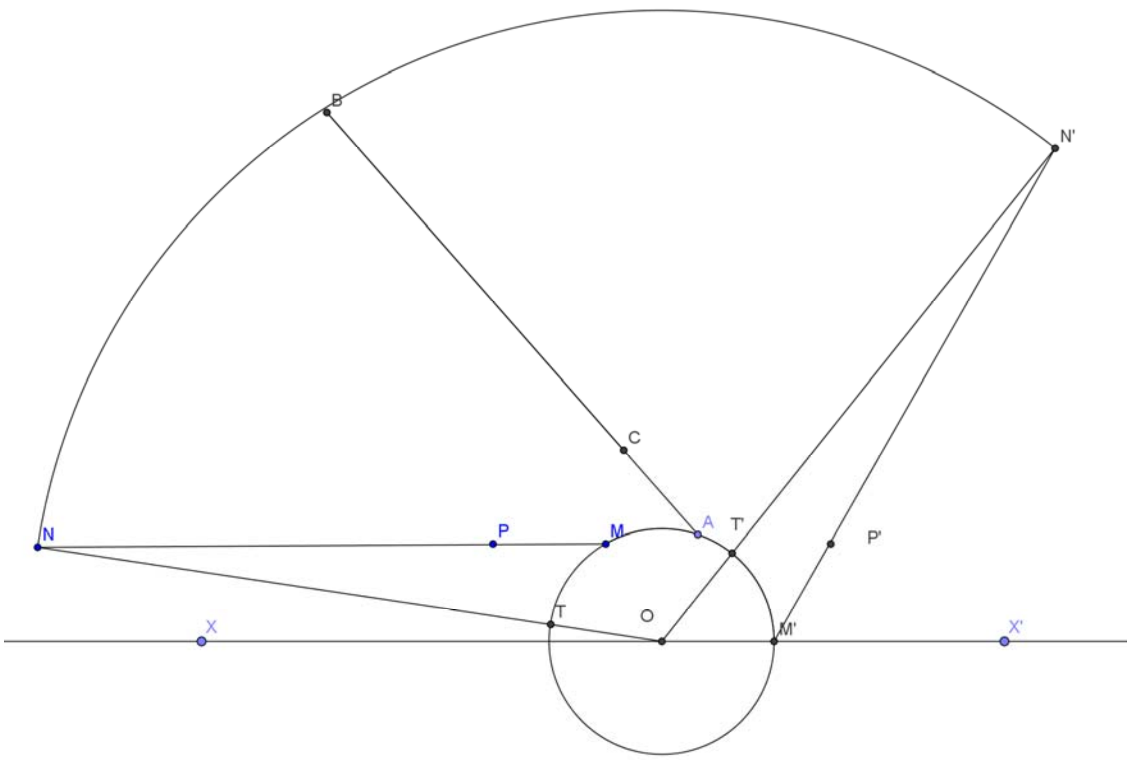
La portion de plan essuyée est celle qui est limitée par les segments [MN] et [M'N'] et les arcs $\widehat{MM'}$ et $\widehat{NN'}$. Soient *T* et *T'* les intersections du cercle de centre *O* passant par *M* et les segments [ON] et [ON']. Le cercle étant invariant par la rotation et le segment [ON] ayant pour image [ON'], T a donc pour image T'. Les points MTN ont respectivement pour images M' T' N', et la conservation des aires par rotation montre que la portion de plan limitée par [*MN*], [*NT*] et l'arc $\widehat{MT}$ a la même aire que celle limitée par [*M'N'*] [*N'T'*] et l'arc $\widehat{M'T'}$. On peut dire aussi que le système étant rigide, les triangles OMN et OM'N' sont isométriques.
Ainsi la portion essuyée a la même aire que celle qui est limitée par les segments [*NT*] et [*N'T'*] et les arc de cercle $\widehat{NN'}$ et $\widehat{TT'}$.

L'aire de cette portion de plan est donc $\mathcal{A} = \frac{1}{3}\left(\pi.ON^2 - \pi.OT^2\right) = \frac{\pi}{3}\left(OB^2 - OA^2\right)$

Or, $OA^2 = a^2$ et d'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OBH,

$$OB^2 = OH^2 + HB^2 = OH^2 + \left(HC + CB\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2} + 4a\right)^2 = \left(\frac{3}{4} + \frac{121}{4}\right)a^2 = 31a^2$$

L'aire cherchée est donc $\mathcal{A} = \frac{\pi}{3}\left(31a^2 - a^2\right) = \frac{\pi}{3} \times 30a^2 = 10\pi a^2$ $\boxed{\mathcal{A} = 10\pi a^2}$



Exercice 2 : Le singe sauteur

Cet exercice a été choisi par la cellule nationale. Les éléments de solution qui suivent ont été fournis par l'académie qui a proposé cet exercice.

1. Le nombre 4 est atteignable car 1+2-3+4=4.
2. Le singe n'a le choix : 1+2-3+4 et … il est bloqué !!

3. Le nombre 9 est atteignable car on a 1+2+3-4+5-6+7-8+9=9, sans jamais sortir de l'intervalle [0 ; 9].

4. Les exemples précédents traitent les carrés 4 et 9. Le cas échéant la recherche pour 16 peut donner 1+2+3+4-5+6-7+8-9+10-11+12-13+14-15+16, en remarquant que l'on ne sort jamais de l'intervalle [0 ; 16]. L'observation des sommes produites peut amener la solution générale :

$$1+2+3+.....+n-(n+1)+(n+2)-(n+3)+(n+4)..........-(n^2-1)+n^2 =$$

$$\frac{n(n+1)}{2}+1+1+1+.................+1=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n^2-n}{2}=n^2$$

d'où n^2 est atteignable. Les seules difficultés sont le comptage des termes valant 1 et la vérification du fait que l'on reste bien dans l'intervalle $[0 ; n^2]$.

5. Si le nombre n est atteignable, il existe des a_i valant 1 ou -1 telles que $1+2a_2+3a_3+......+(n-1)a_{n-1}=0$. Dans cette somme on sépare les termes positifs dont on note la somme S_+ des termes négatifs dont on note la somme S_-. On a alors : $S_+=S_-$. On calcule ensuite :

$$1+2+3+.......+(n-1)=S_+-S_-=2S_+$$

On en déduit que : $\frac{(n-1)n}{2}=2S_+$ d'où $n(n-1)=4S_+$ et donc 4 divise le produit $n(n-1)$. Donc n est de la forme $4k$ ou $4k+1$. Par exemple 18 n'est pas atteignable.

La réciproque est fausse puisque 5 n'est pas atteignable.

6. L'idée est de transformer une configuration de signes + - en - +, cela va ajouter 2 au nombre N. Ensuite on complète par la suite -(N+1) + (N+2) – (N+3) + (N+4) et l'on trouve N+4. On note S(i) la somme partielle des *i*-premiers termes. Remarquons que la séquence donnant N se termine par -(N-1)+ N. La séquence commence par 1+2+3 et le premier signe – apparaît en position i+1. Alors S(i-1) ≥ i, car S(3) ≥ 4. On change alors la sous-séquence i-(i+1) en –i+(i+1), ce qui est possible. On ajoute la séquence -(N+1) + (N+2) – (N+3) + (N+4), ce qui assure que N+4 est atteignable.
Question subsidiaire : est-il vrai que les nombres de la forme N=4k ou 4k+1, hormis 5, 8, 12, 17 sont atteignables ?

Exercice 3 : Loto

Au départ, il y a N jetons dans le tas A et 101 – N jetons dans le tas B. La somme des jetons contenus dans le tas A est S, la somme des jetons contenus dans le tas B est $\frac{101\times102}{2}-S$, soit $5\,151-S$.

Une fois le jeton 40 transféré, il y a $N-1$ jetons dans le tas A, et la somme de leurs numéros est $S-40$. La différence entre les deux moyennes est donc $\frac{S-40}{N-1}-\frac{S}{N}=0,25$.

Il y a $102-N$ jetons dans le tas B et la somme de leurs numéros est $5\,191-S$. La différence entre les deux moyennes est donc $\frac{5\,191-S}{102-N}-\frac{5\,151-S}{101-N}=0,25$.

La première égalité fournit : $S=0,25N^2+39,75N$

Et la seconde : $S=0,25N^2-10,75N+3686,5$

Ce qui se simplifie pour donner $50,5N=3686,5$, soit $N=73$.

On vérifie que ce résultat correspond à la somme 4 234. On peut obtenir la somme 917 en B en y mettant les jetons 9, 10 et tous les jetons de 20 à 47 sauf le jeton 40. Il y a bien d'autres solutions, mais il faut en produire une pour achever le problème.

Exercice 4 : Somme et produit se ressemblent

1. *a.* Dans une suite de 16 entiers consécutifs, il y en a 8 pairs. Leur produit est donc un multiple de 256 et a fortiori de 16.

b. Dans une suite de 16 entiers consécutifs, trois au moins sont des multiples de 5 (quatre si la suite commence – et finit – par un multiple de 5). Leur produit est donc un multiple de 125.

c. Le produit *P* est donc un multiple de 8×125, c'est-à-dire 1 000. *P* se termine par trois zéros.

2. *a.* En appelant *n* le premier des nombres :

$$S = n + (n+1) + ... + (n+14) + (n+15)$$
$$S = 16n + 120$$

b. On voudrait que 16*n* + 120 soit un multiple de 1 000. Le premier possible est 1 000 lui-même, ce qui donne $n = 55$.

3. Posons $S = 1000S'$ et $P = 1000P'$. Dire que *S* et *P* ont les quatre derniers chiffres identiques, c'est dire que *S*' et *P*' ont le même chiffre des unités. Celui de *P*' est pair, car *P* est divisible par 16. Si celui de *S*' était pair, cela signifierait que *S*' est divisible par 16, ce qui n'est pas (car 120 ne l'est pas).