Éléments de solution

La rosace (Solution fournie par l'académie qui a proposé l'exercice)

1. On constate que le motif se retrouve 6 fois dans la rosace. Donc l'angle vaut 60°.

2. *a*. Notons D le sommet tel que ACD soit rectangle en D. La droite (AC) étant une bissectrice, on a donc $\widehat{\mathrm{CAD}} = 30°$. Donc $\widehat{\mathrm{BCD}} = 60°$. Et puisque $\mathrm{BC} = \mathrm{DC}$, le triangle BCD est donc équilatéral. Ensuite, $\widehat{\mathrm{BDA}} = 30°$, donc le triangle ABD est isocèle en B, d'où $\mathrm{BD} = \mathrm{BA}$. Finalement, on trouve bien $\mathrm{AB} = \mathrm{BC}$.

Deuxième méthode : On note *R* le rayon du grand cercle. On applique une formule de trigonométrie : $\sin\widehat{\mathrm{DAC}} = \dfrac{\mathrm{DC}}{\mathrm{AC}}$, d'où $\sin 30° = \dfrac{R}{\mathrm{AC}}$. Puisque $\sin 30° = \dfrac{1}{2}$, on obtient $\mathrm{AC} = 2R$. Or $\mathrm{BC} = R$, d'où $\mathrm{AB} = R$. Finalement $\mathrm{AB} = \mathrm{BC}$.

b. Notons E le centre du petit cercle et *r* le rayon de ce cercle. En appliquant le résultat précédent, il vient que $\mathrm{AE} = 2r$. De plus, $\mathrm{EB} = r$. On obtient donc $\mathrm{AB} = 3r$, c'est-à-dire $R = 3r$.

3. On doit avoir $\mathrm{AD} = 3\sqrt{3}$, c'est-à-dire $\sqrt{(2R)^2 - R^2} = 3\sqrt{3}$, d'où $R = 3$. Puis $r = 1$.

4. Si $r = \dfrac{1}{2}$, alors l'autre côté du petit triangle vaut $r\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Donc l'aire du petit triangle est $\dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$. D'autre part, on a : $R = 3r = \dfrac{3}{2}$, et l'autre côté du grand triangle vaut $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, donc l'aire du grand triangle vaut $\dfrac{9\sqrt{3}}{8}$. La partie noire à l'intérieur du triangle ACD s'obtient en retranchant au grand triangle le petit, le secteur $\widehat{\mathrm{BEF}}$ (où F est le point tel que AEF est rectangle en F), et le secteur $\widehat{\mathrm{BCD}}$.

Cette surface vaut donc $\dfrac{9\sqrt{3}}{8} - \dfrac{\sqrt{3}}{8} - \dfrac{\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2}{3} - \dfrac{\pi\times\left(\frac{3}{2}\right)^2}{6} = \sqrt{3} - \dfrac{11\pi}{24}$. Il reste à multiplier par 12 pour obtenir l'aire totale : $12\sqrt{3} - \dfrac{11\pi}{2}$.

À la recherche du chaînonze (Solution fournie par l'académie qui a proposé l'exercice)

1. Si x est le chiffre à ajouter à droite de la chaîne, on a que deux possibilités : $9 + x - 4 = 0$ ou $9 + x - 4 = 11$ et seule la deuxième équation donne une solution acceptable, qui est 6, puisqu'un chiffre est un entier positif compris entre 0 et 9. D'où la chaîne peut-être prolongée en : « 7 5 9 4 6 ».
2. Si on continue on obtient le chaînonze « 7 5 9 4 6 2 7 5 9 4 6 2 … ». La chaîne « 7 5 9 4 6 2 » se répète constamment. On sait 2010 divisible par 6, donc le 2010^{e} terme est 2.
3. Pour « 0 9 » on obtient « 0 9 9 0 2 2 0 9 9 0 2 2 0 9 ». La chaîne « 0 9 9 0 2 2 » se répète constamment.
   Pour « 9 1 » on obtient « 9 1 3 2 » et le chaînonze est « bloqué » car les équations $3 + x - 2 = 0$ et $3 + x - 2 = 11$ admettent comme solutions -1 et 10 qui ne sont pas des chiffres.
   On trouve :

a. Si $b = a$, le prolongement est « $a\ b\ 0$ ».

b. Si $b = a - 1$, c'est impossible car les équations $a + x - b = 0$ et $a + x - b = 11$ donnent $x = -1$ et $x = 11 - (a - b) = 10$ qui ne sont pas des chiffres.

c. Si $b < a - 1$, on a le chaînonze « $a\ b\ (11 - a + b)$ » avec $(11 - a + b)$ qui est bien un chiffre car si a et b sont deux chiffres où $b < a - 1$, on a $-10 < b - a < -1$ d'où $1 < 11 - a + b < 10$.

d. Si $a < b$, « $a\ b\ (b - a)$ » avec $b - a$ est bien un chiffre car $0 < b - a < 10$.

Dans tous les cas, le prolongement est soit impossible (cas $b = a - 1$) soit unique.

4. **1er cas : si $a = b$**

Si $a = b = 0$, on obtient « 0 0 0 0 ... » le chaînonze est 1-périodique donc a fortiori 6-périodique.
Si $a = b = 1$, on obtient « 1 1 0 » et le chaînonze est fini de longueur 3.
Si $a = b$ avec $a > 1$, on obtient « $a\ a\ 0\ (11 - a)\ (11 - a)\ 0\ a\ a$ ... » le chaînonze est 6-périodique sans blocage.

2e cas : $a = b + 1$

la chaîne se bloque et est de longueur 2.

3e cas : $a = 0$ et $b = 1$

« 0 1 1 0 » est le prolongement en un chaînonze de longueur 4.

4e cas : $0 < a < b$,

« $a\ b\ (b - a)\ (11 - a)\ (11 - b)\ (11 + a - b)\ a\ b$ » est le prolongement en un chaînonze 6-périodique ou se bloque d'après la question précédente si

- $b - a = b - 1$, c'est-à-dire $a = 1$ et la chaîne est de longueur 3,
- $11 - b = 11 - a - 1$, c'est-à-dire $b = a + 1$ et la chaîne est de longueur 5.

5e cas : Si $b = 0$ et $a > 1$

le prolongement est « $a\ 0\ (11 - a)\ (11 - a)\ 0\ a$ » et le chaînonze est infini.

6e cas : Si $a > b + 1 > 1$

« $a\ b\ (11 - a + b)\ (11 - a)\ (11 - b)\ (a - b)\ a\ b$ » le chaînonze est 6-périodique ou se bloque si $11 - a = 11 - a + b - 1$, c'est-à-dire $b = 1$ et la chaîne est de longueur 4.

On résume tous les cas dans un tableau dans lequel figurent 33 cas de blocage et 67 cas fournissant des chaînonzes infinis et 6 périodiques.

a \ b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		4								
1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3
2		2		5						
3		4	2		5					
4		4		2		5				
5		4			2		5			
6		4				2		5		
7		4					2		5	
8		4						2		5
9		4							2	

Retour à Syracuse (exercice académique, séries STG, L et ES)

1. Voici des étapes possibles : 56 – 28 – 14 – 7 – 2 − 1

2. Voici des étapes possibles : 29 – 58 – 19 – 6 – 3 – 10 – 5 – 16 – 8 – 4 – 2 – 1

3. Voici deux étapes : on va de $3m+2$ à $6m+4$. Comme $6m+4=3(2m+1)+1$, on peut aller à $2m+1$.

4. Voici des étapes possibles : on va de $3m$ à $9m+1$, de $9m+1$ à $18m+2$ puis à $36m+4$. Comme $36m+4=3(12m+1)+1$, on peut aller à $12m+1$, puis à $4m$ et $2m$.

5. Pour tout entier naturel n strictement supérieur à 2, il existe un entier naturel m supérieur ou égal à 1 tel que $n=3m$, $n=3m+1$ ou $n=3m+2$. L'hypothèse, jointe aux résultats démontrés précédemment, montre qu'on peut aller de toute case portant un numéro supérieur ou égal à 3 à une case portant un numéro *inférieur strictement*. En poursuivant cette descente, on parvient à 1 ou 2, mais de 2 on peut aller à 1. Donc on peut parvenir à 1.

Piles de triangles (exercice académique, séries STG, L et ES)

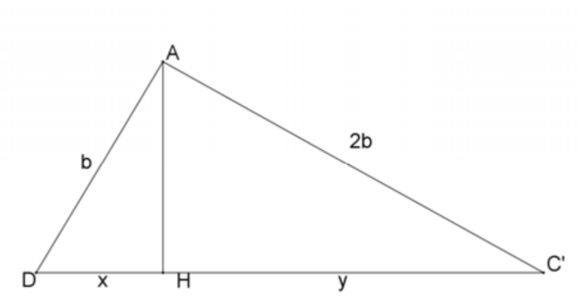
1. Si on empile deux triangles, on obtient des sommes supérieures ou égales à 4. Pour les réduire toutes à 4, il faut faire apparaître $(1,3)$ et $(3,1)$, c'est ce qui est impossible, car dans un empilement de deux triangles, si le 3 est au-dessus du 1, alors c'est le 2 qui est au-dessus du 3.

Pour obtenir des sommes toutes égales à 5, il est nécessaire d'empiler au moins 3 triangles (car avec 2, la somme totale est 12), mais la somme totale est alors 18, qui est supérieur à 3 fois 5.

On peut obtenir des sommes toutes égales à 6 en empilant 3 triangles de telle sorte que le long des arêtes on lise par exemple : 1-2-3, 2-3-1 et 3-1-2.

2. Si on empile n triangles, la somme des sommes lues en suivant les arêtes latérales du prisme est $6n$. Si ces sommes sont égales, elles sont égales à $2n$. Qu'elles puissent être égales à 2011 est donc exclu. En empilant 1 005 triangles en 335 séries de 3 comme dans la question précédente, on obtient des sommes toutes égales à 2 010.

Le trapèze (exercice académique, séries STI et S)

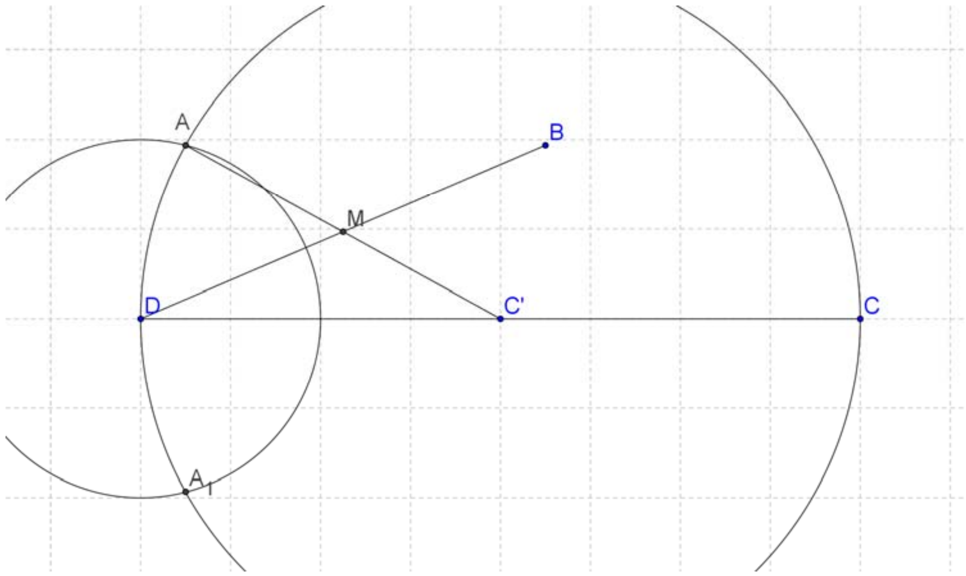


1. On associe au trapèze ABCD le triangle ADC' ci-contre, en retenant l'égalité : $x+y=a$.
L'inégalité triangulaire fournit : $a<b+2b$.
Le théorème de Pythagore appliqué aux triangles ADH et AHC', rectangles en H, donne l'égalité : $b^2-x^2=4b^2-y^2$, c'est-à-dire $3b^2=y^2-x^2$. Et comme $a^2>x^2-y^2$, on obtient l'encadrement souhaité.

.

2. La question est : étant donné les nombres positifs a et b satisfaisant $\sqrt{3}b<a<3b$, est-il possible de construire un triangle ADC' de côtés $\mathrm{DC'}=a$, $\mathrm{AD}=b$, $\mathrm{AC'}=2b$ dont les angles en D et C' soient aigus ?

Les inégalités triangulaires sont satisfaites ($a<b+2b$ et $a>2b-b$). Dire qu'il y a un angle aigu en D est traduit par l'inégalité $\mathrm{AC'}^2<\mathrm{AD}^2+\mathrm{DC'}^2$ qui est une des hypothèses.



3. Le point A est un des points d'intersection des cercles de centre D de rayon 1 et de centre C' de rayon 2, la distance des points D et C' étant 2. Le point B est le quatrième sommet du parallélogramme dont les trois premiers sont C', D et A. Le point C est le symétrique de D par rapport à C'.

La semeuse (exercice académique, séries STI et S)

1. $f(1,2) = 1f(1,1+1) = (1+1)\,f(1,1) = 2\times 3 = 6$

$$f(1,3) = f(1,1+2) = \frac{(1+2)}{2}\,f(1,2) = \frac{3}{2}\times 6 = 9$$

2. Si b est suffisamment grand : $f(1,b) = f(1,1+b-1) = \dfrac{b}{b-1}\,f(1,b-1)$

On peut donc écrire : $f(1,b) = \dfrac{b}{b-1}\times\dfrac{b-1}{b-2}\times\ldots\times\dfrac{4}{3}\times\dfrac{3}{2}\times\dfrac{2}{1}\,f(1,1) = 3b$

3. En sautant quelques étapes et en enchaînant fâcheusement les égalités, on peut écrire :

$$f(8,5) = f(5,8) = \frac{8}{3}\,f(5,3) = \frac{8}{3}\,f(3,5) = \frac{8}{3}\times\frac{5}{2}\,f(3,2) = \frac{8}{3}\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{1}\,f(1,2) = 120$$

4. La même technique donne :

$$f(2\,000, 2\,010) = 201\times\frac{2\,000}{1990}\times\frac{1990}{1980}\times\ldots\times\frac{20}{10}\,f(10,10) = 482\,400$$