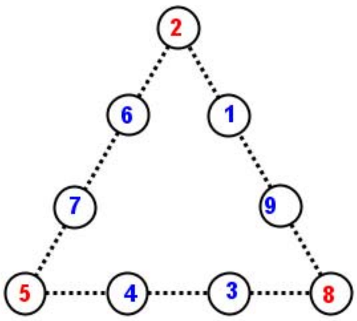
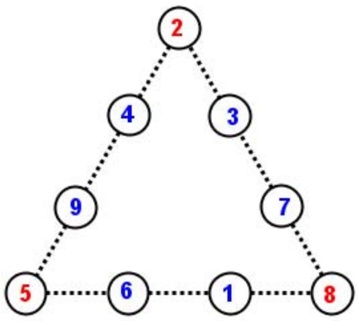
Éléments de solution

Exercice 1 Les triangles magiques
Partie A : 1+2+3 = 6 pour la plus petite, 9+8+7 = 24 pour la plus grande
Partie B

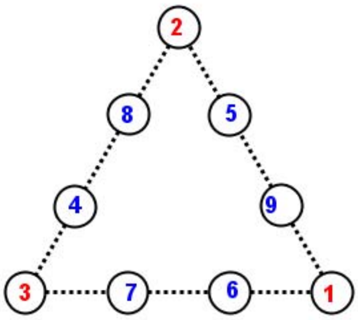


Une première solution



Une seconde solution

2. Si le triangle est S-magique, la somme des nombres placés sur chaque ligne est le tiers de la somme totale. La somme totale est la somme de la somme des entiers compris entre 1 et 9 (c'est-à-dire 45) et de la somme T des nombres placés aux sommets. D'où l'égalité $45 + T = 3\ S$.
On a vu plus haut que T est compris entre 6 et 24. D'où l'encadrement $17 \leq S \leq 23$.
Les couples envisageables sont : (17, 6), (18, 9), (19, 12), (20, 15), (21, 18), (22, 21), (23, 24).



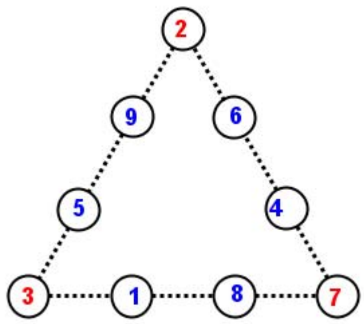
Un triangle 17-magique

4. Recherche de triangles 18-magiques

$T = 9$ s'obtient avec les triplets (1, 2, 6), (1, 3, 5) et (2, 3, 4).
Dans le premier cas, il faut obtenir 15 comme somme de deux nombres choisis parmi 3, 4, 5, 7, 8 et 9, ce qui nécessite de prendre 7 et 8, mais il est alors impossible d'obtenir 10 comme somme de deux nombres choisis parmi 3, 4, 5 et 9.
Le même genre de raisonnement permet de conclure dans les autres cas.
Il n'existe pas de triangle 18-magique.

5. $T = 12$ s'obtient avec les triplets (1, 2, 9), 1, 3, 8), (1, 4, 7), (1, 5, 6), (2, 3, 7), (2, 4, 6) et (3, 4, 5). On vérifie que les triplets où n'apparaît pas 7 ne peuvent convenir (les arguments sont du même type que ceux évoqués à la question précédente).

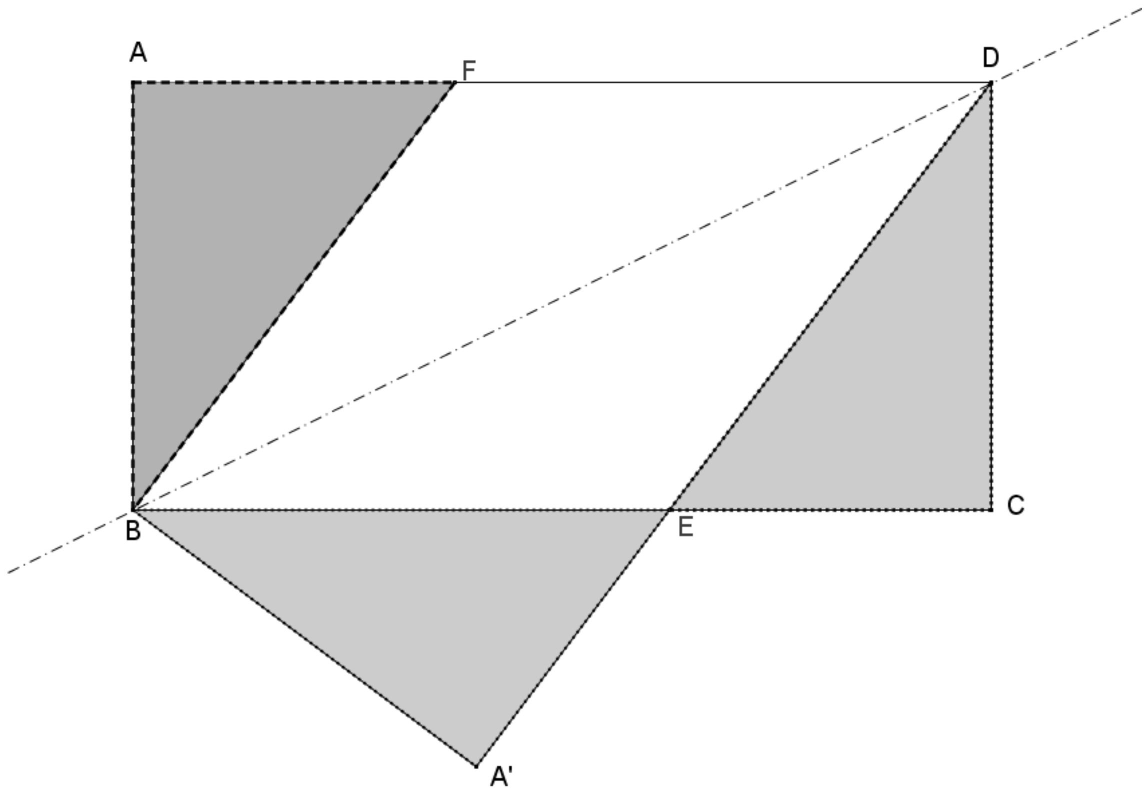
6. On utilise l'égalité : $3.\ (40 - S) = 45 + (30 - T)$ qui montre que la somme $(40 - S)$ est associée à $(30 - T)$. Cette égalité ne prouve pas l'existence d'un triangle de somme $40 - S$. Ce triangle est obtenu à partir d'un triangle de somme S en remplaçant le nombre qui figure dans chaque case par son complément à 10.



Un triangle 19-magique

7. Il ne reste que le cas $S = 20$ à étudier. On a rencontré un triangle 20-magique à la question 1.

Exercice 2 Des ciseaux et du papier



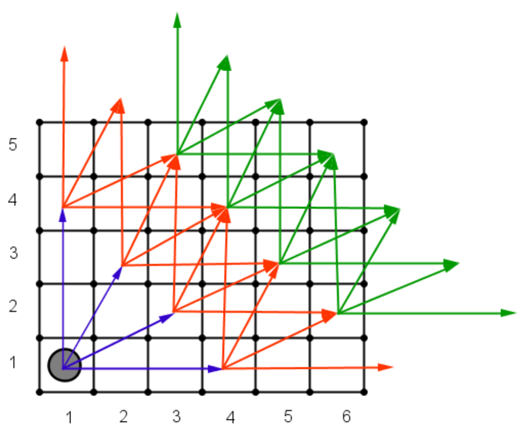
5. Les triangles BA'E et DCE sont rectangles et ont tous leurs angles de même mesure (deux sont opposés par le sommet, les autres sont leurs complémentaires). Ils sont deux côtés de même mesure (BA' = BA = DC). Ils sont donc isométriques et BE = DE. Le quadrilatère a [deux côtés consécutifs de même longueur et, par symétrie] ses quatre côtés de même longueur : c'est un losange.

2. On applique le théorème de Pythagore au triangle DEC rectangle en C d'hypoténuse c et de côtés 8 et $(16 - c)$. On trouve $c = 10$.

3. Appelons L et ℓ les dimensions (entières) du rectangle. Le raisonnement précédent conduit à l'égalité : $L.(L - 15) = \ell^2$ .On essaie donc les valeurs entières de L comprises entre 1 et 14, qui font apparaître le (seul) carré 36 pour L = 12 et donc $\ell = 6$.

4. L'aire du losange est : $\mathcal{A} = L.\,\ell - \ell.(L - c)$. On remplace c par $(L^2 + \ell^2)/2L$ et on parvient à $\ell = L / \sqrt{2}$.

Exercice 3 L ES STG Au-delà des grilles



Après trois mouvements (représentés en bleu, orange et vert), une seule case est encore susceptible d'être occupée dans la grille. Au maximum quatre mouvements seront donc utilisés pour sortir de la grille.

En quittant la case située sur la i-ième colonne et la j-ième ligne, notée (i, j), le pion atteint une des cases $(i+3, j)$, $(i+2, j+1)$, $(i+1, j+2)$, $(i, j+3)$. La somme des coordonnées augmente donc de 3 à chaque mouvement.
On ne peut atteindre la case (i, j) que si $i + j - 2$ est un multiple de 3 (car la case de départ est (1, 1)).

Exercice 4 L ES STG « Too many notes »

1. Pour obtenir une moyenne de 2,3 avec deux notes dont une est 3,2, il faut que l'autre soit 1,4.

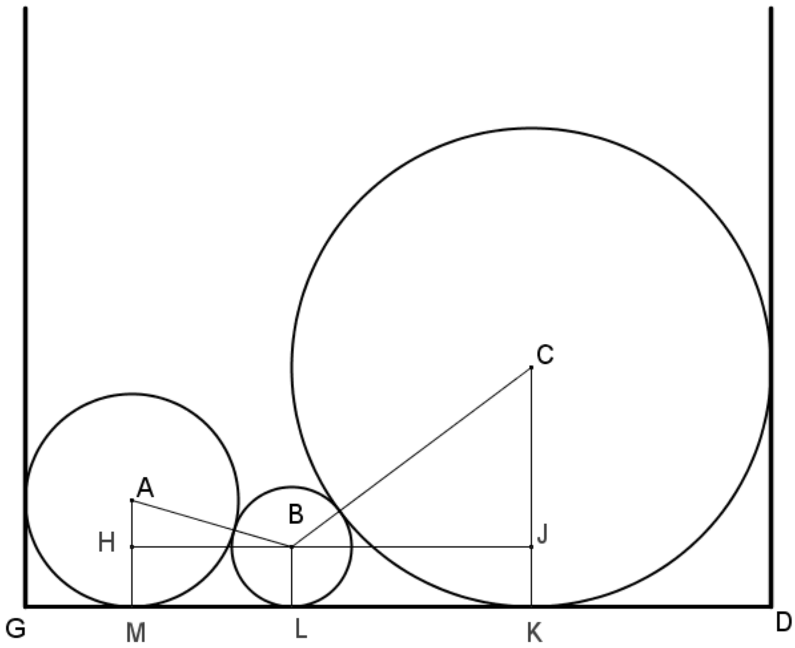
2. Supposons la chose possible pour une certaine note N dont le chiffre des unités est u et la première décimale d. En associant à N une seconde note N', on a réalisé une moyenne M dont le chiffre des unités est d et la première décimale u. Voyons alors ce qu'on peut faire pour la note $N + 0,1$.

- Si la première décimale de $N + 0,1$ est $d + 1$ (cas où d n'est pas égal à 9), en ajoutant 1,9 à N', et la somme à $N + 0,1$, on obtient un total de $2M + 2$, et donc une moyenne de $M + 1$, dont le chiffre des unités est $d + 1$ et la première décimale u. Ce raisonnement écarte deux cas : le cas où ajouter 1,9 à une note donne un total supérieur à 20, et celui où $N + 0,1$ est un entier ;

- Cas des nombres entiers : on peut le traiter exhaustivement à part (ce qui inclut notamment le cas de 0, et permet donc de commencer le processus) ;

- Cas des premières notes N associés à des secondes notes N' supérieures à 18,2 : dans ce cas, on peut prendre pour seconde note $N'+1,9 - 20$. La moyenne diminue de 10, mais le chiffre des unités et la première décimale ne changent pas.

Exercice 3 Tas de bois



La coupe selon le plan vertical passant par C et D fournit la figure ci-contre.

La largeur associée à une disposition des rondins est la somme de la distance HJ et des rayons des cercles extérieurs. La distance HJ s'obtient par application du théorème de Pythagore dans les triangles AHB et BJC rectangles respectivement en H et J (la distance des centres de deux cercles tangents extérieurement est la somme de leurs rayons).

1. $HB^2 = (16 + 9)^2 - (16 - 9)^2$; $BJ^2 = (36 + 16)^2 - (36 - 16)^2$. D'où HB = 24 et BJ = 48 ; et 9 + 24 + 48 + 36 = 117.
Dans l'ordre 16, 9, 36 (celui de la figure ci-dessus) on obtient : 16 + 24 + 36 + 36 = 112 (attention, les deux 36 ne jouent pas le même rôle).

2. Voici le calcul littéral correspondant à ce qui a été fait ci-dessus :
$$\ell(a,b,c) = a + \sqrt{(a+b)^2 - (a-b)^2} + \sqrt{(b+c)^2 - (b-c)^2} + c$$
(noter qu'écrire $a - b$ plutôt que $b - a$ n'a pas d'influence sur le résultat).
Finalement : $\ell(a,b,c) = a + 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{bc} + c$.

On calcule : $\ell(b,a,c)-\ell(a,b,c)=b+2\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}+c-\left(a+2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+c\right)$

Et donc $\ell(b,a,c)-\ell(a,b,c)=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(2\sqrt{c}-\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$

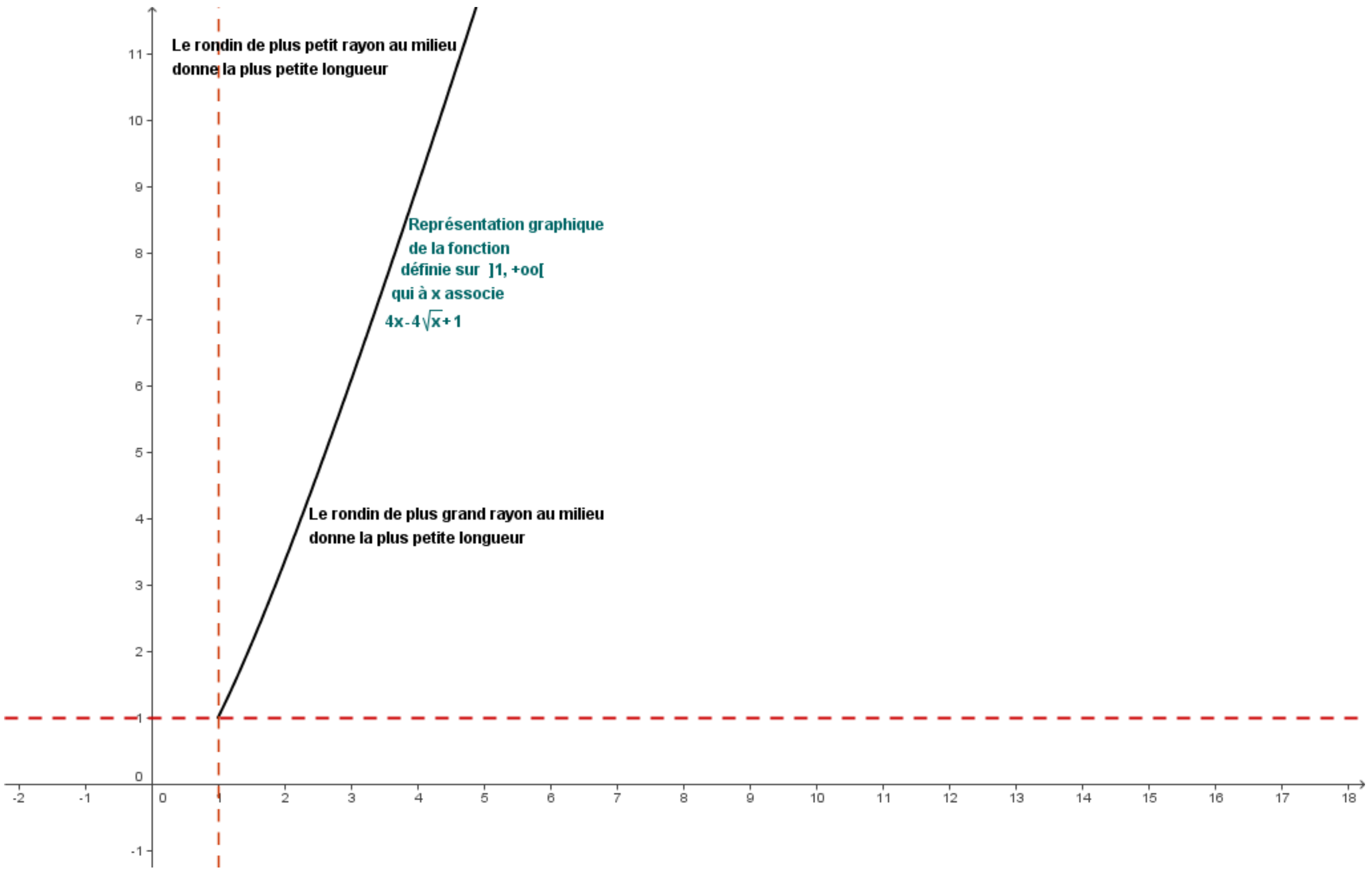
3. On doit comparer $\ell(1,x,y), \ell(x,1,y)$ et $\ell(1,y,x)$. On sait que

$\ell(1,x,y)-\ell(x,1,y)=\left(\sqrt{x}-1\right)\left(2\sqrt{y}-\sqrt{x}-1\right)$, prouve, compte tenu de l'hypothèse $1<x<y$, que $\ell(1,x,y)>\ell(x,1,y)$.

$\ell(1,x,y)-\ell(1,y,x)=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(2-\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)$, prouve, compte tenu de l'hypothèse $1<x<y$, que $\ell(1,x,y)>\ell(1,y,x)$.

Placer les rondins de gauche à droite dans l'ordre de leurs rayons donne donc la longueur maximale.

$\ell(y,1,x)-\ell(1,y,x)=\left(1-\sqrt{y}\right)\left(2\sqrt{x}-1-\sqrt{y}\right)$ prouve que la différence entre la longueur obtenue en plaçant le rondin de plus petit rayon au milieu et celle obtenue en mettant celui de plus grand rayon au milieu est du signe de $\sqrt{y}-2\sqrt{x}+1$



Exercice 4S Moyennes de puissances de 2

1. Si l'entier n est *joli*, il existe un entier k et une suite de k entiers p_i tels que $n=\dfrac{\sum_{i=1}^{k}2^{p_i}}{k}$.

Le nombre $n+1$ s'écrit successivement :

$n+1=\dfrac{\sum_{i=1}^{k}2^{p_i}}{k}+1=\dfrac{\sum_{i=1}^{k}2^{p_i}+k}{k}=\dfrac{2\sum_{i=1}^{k}2^{p_i}+2k}{2k}=\dfrac{\sum_{i=1}^{k}2^{p_i+1}+2+2+\ldots+2}{2k}$, et dans ce dernier quotient, il y a bien $2k$ puissances de 2 au numérateur. Donc $n+1$ est *joli*.

Tous les entiers sont donc *jolis*, à commencer par 1, moyenne d'une suite de puissances de 2 réduite à un seul terme.
On peut écrire : $2\,009 = 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 16 + 8 + 1$
Cette somme de (par chance) huit puissances de 2 peut s'écrire comme la moyenne de leurs huit produits par 8, qui sont aussi des puissances de 2.

2. On peut écrire : $7 = \dfrac{16+4+1}{3}$

Si l'entier n est *superbe*, il existe un entier k et une suite de k entiers p_i tous distincts tels que $n = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} 2^{p_i}}{k}$.

On a alors : $2n = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} 2^{p_i+1}}{k}$, les $p_i + 1$ étant eux-mêmes tous distincts.

Réciproquement, dans l'expression $2n = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} 2^{p_i}}{k}$, le numérateur du quotient est un entier pair (égal à $2nk$),

il est donc possible de simplifier par 2 pour obtenir $n = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} 2^{p_i} - 1}{k}$, où les $p_i - 1$ sont tous positifs ou nuls et distincts.

Dans l'égalité $13k = \sum_{i=1}^{k} 2^{p_i}$, où les pi sont distincts, la plus grande des puissances de 2 inférieures ou égales à $13k$, mettons 2^m, apparaît nécessairement, car la somme des m plus petites,
$1 + 2 + 4 + ... + 2^{m-1} = 2^m - 1$ est inférieure à $13k$.
S'il est avéré que, pour tout entier k supérieur ou égal à 7, $13k < 2^k - 1$, la recherche des puissances de 2 susceptibles de participer à une suite dont la moyenne serait 13 se limite aux 7 premières. Le plus petit multiple de 13 supérieur à 64 est 65.
$5 \times 13 = 65 = 64 + 1$ ne peut être obtenu comme somme de 5 puissances de 2,
$4 \times 13 = 52 = 32 + 16 + 4$ ne le peut pas non plus (comme dit plus haut, il est illusoire de « sauter » une des puissances dont on fait la somme dans l'ordre décroissant tant que l'ajouter à la somme ne dépasse pas le nombre à atteindre),
$3 \times 13 = 39 = 32 + 4 + 2 + 1$ est une somme de quatre puissances,
$2 \times 13 = 26 = 16 + 8 + 2$ une somme de trois termes,
Et 13 n'est pas une puissance de 2.

Remarque : l'assertion utilisée résulte de la comparaison de deux suites, l'une arithmétique, l'autre géométrique. Cette assertion peut être montrée par récurrence si on connaît la récurrence, mais elle peut aussi être énoncée simplement « pour les nombres supérieurs à 16, le produit par 2 augmente plus que la somme avec 13 »

$13k$	13	26	39	52	65	78	91	104	...
2^k	2	4	8	16	32	64	128	256	...