

Exercice 1

Les triangles magiques

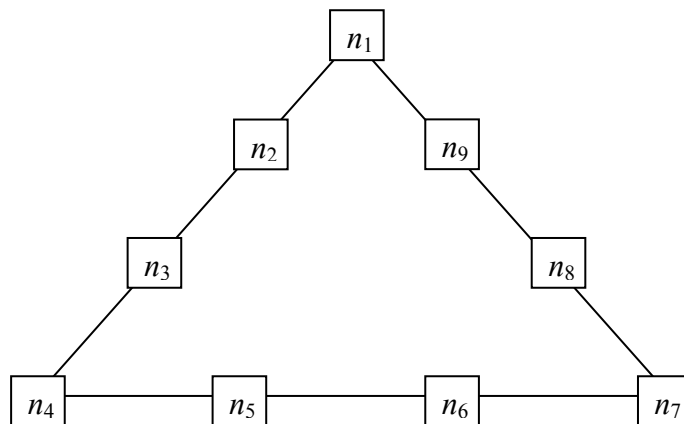
Partie A : Questions préliminaires :

On considère trois entiers deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.

- 1- Quelle est la plus petite valeur possible pour leur somme ?
- 2- Quelle la plus grande valeur possible pour leur somme ?

Partie B : Les triangles magiques :

On place **tous les nombres entiers de 1 à 9** dans les neuf cases situées sur le pourtour d'un triangle, comme indiqué sur la figure ci-dessous.

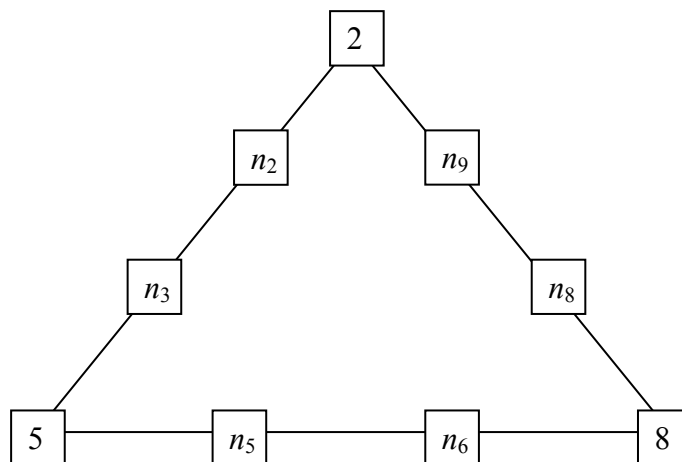


Si les sommes des quatre nombres situés sur chacun des trois côtés du triangle ont la même valeur S , on dit que le triangle est S -magique.

$$(C'est à dire si : $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n_4 + n_5 + n_6 + n_7 = n_7 + n_8 + n_9 + n_1 = S$)$$

On se propose de déterminer toutes les valeurs possibles de S .

- 1- Compléter le triangle suivant de sorte qu'il soit 20-magique, c'est-à-dire S -magique de somme $S = 20$.



- 2- On considère un triangle S -magique et on appelle T la somme des nombres placés sur les trois sommets.
 - a. Prouver qu'on a $45 + T = 3S$.
 - b. En déduire qu'on a $17 \leq S \leq 23$
 - c. Donner la liste des couples (S, T) ainsi envisageables.

- 3- Proposer un triangle 17-magique.
- 4- Prouver qu'il n'existe pas de triangle 18-magique.
- 5- a. Montrer que dans un triangle 19-magique, 7 est nécessairement situé sur un sommet du triangle.
b. Proposer un triangle 19-magique.
- 6- Prouver que, s'il existe un triangle S -magique, alors il existe aussi un triangle $(40 - S)$ -magique.
- 7- Pour quelles valeurs de S existe-t-il au moins un triangle S -magique ?

Exercice 2

Des ciseaux et du papier

On plie une feuille de papier rectangulaire le long d'une de ses diagonales ; on coupe les parties qui ne se recouvrent pas puis on déplie la feuille.

On admet qu'ainsi on obtient toujours un losange (cette propriété sera démontrée dans la dernière question de l'exercice).

L'unité de longueur choisie est le centimètre.

- 1- Construire le losange obtenu à partir d'une feuille rectangulaire de longueur $L = 16$ et de largeur $l = 8$.

On pourra noter c la longueur du côté du losange.

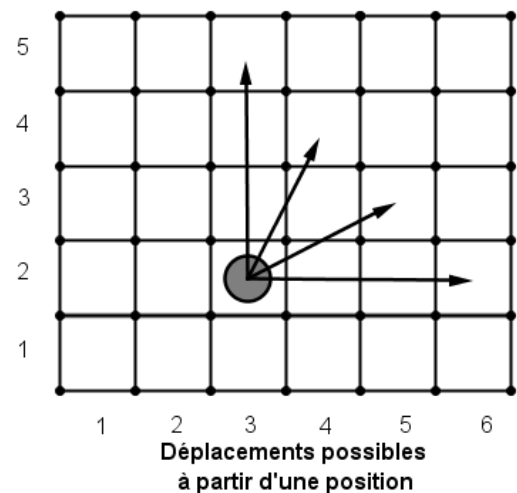
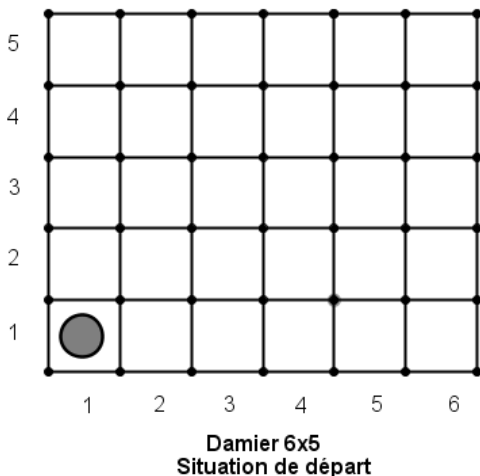
Les questions suivantes sont indépendantes.

- 2- Dans cette question, la feuille rectangulaire de départ a pour longueur 16 et pour largeur 8. Calculer la longueur du côté du losange.
- 3- On veut maintenant obtenir un losange de côté 7,5 à partir d'une feuille dont les dimensions (longueur et largeur) sont des nombres entiers.
Quelles sont les dimensions possibles pour la feuille de départ ?
- 4- À partir d'une feuille de longueur L , on a obtenu un losange dont l'aire est égale à 75 % de celle de la feuille de départ.
Exprimer, en fonction de L , la largeur l de la feuille de départ.
- 5- Démontrer le résultat admis initialement, à savoir que la manipulation décrite en début d'énoncé conduit toujours à un losange.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 3

Au-delà des grilles



On considère un damier rectangulaire composé de n colonnes et p lignes (on prendra $n \geq p$).

Un jeton est placé sur la première case, en bas à gauche. On le déplace dans le damier. Un *mouvement* consiste à déplacer le jeton de trois cases au total, vers la droite ou vers le haut (voir figure).

- 1- Combien faut-il au plus de mouvements pour sortir d'un damier de 6 colonnes et 5 lignes ? d'un damier de n colonnes et p lignes ?
- 2- On donne des entiers i et j . Est-il possible d'atteindre la case située sur la i -ième colonne et la j -ième colonne ?

Exercice 4

« Too many notes »

Un professeur donne aux travaux que lui rendent les élèves une note, comprise entre 0 et 20, comportant une décimale au plus.

Albert, qui a obtenu **3,1** pour le premier travail rendu et **19,5** pour le second, observe que la moyenne **11,3** de ces deux notes a pour décimale le chiffre des unités de la première (**3**) et pour chiffre des unités la décimale de la première (**1**).

Béatrice, qui n'a pas encore sa seconde note, se demande s'il peut en être de même pour elle.

- 1- Montrer que c'est possible si sa première note est **3,2**.
- 2- Est-ce toujours possible pour des notes non nulles strictement inférieures à 20 ?