MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Olympiades académiques de mathématiques

Mercredi 12 mars 2008

Classes de premières ES, L et S.T.G.

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont autorisées.

Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à faire figurer sur les copies les résultats, même partiels, auxquels ils sont parvenus, et les idées qui leur sont venues.

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

INRIA ROCQUENCOURT

partenaire de l'académie de Versailles

Exercice numéro 1

Les bons nombres

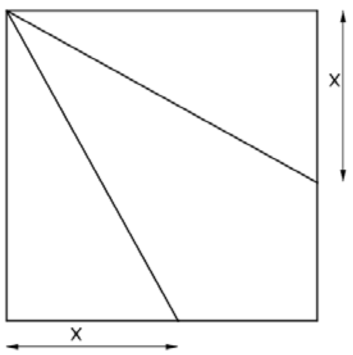
On dit qu'un nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon » s'il peut s'écrire comme la somme de nombres entiers naturels non nuls, distincts ou non, dont la somme des inverses est égale à 1.
On dit qu'il est « mauvais » s'il n'est pas « bon ».
Ainsi, par exemple :

- $2 = 1 + 1$ et $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} \neq 1$, donc 2 est « mauvais » (la seule décomposition possible pour 2 étant 1+1).
- $3 = 1 + 2$ et $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \neq 1$, $3 = 1 + 1 + 1$ et $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \neq 1$, donc 3 est également « mauvais » (les deux décompositions possibles pour 3 ayant été examinées).

1. Déterminer pour chacun des nombres entiers de 4 à 10 s'il est « bon » ou « mauvais ».
2. Montrer que le carré de tout nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon ».
3. Montrer que si n est « bon », alors $2n + 2$ et $2n + 9$ sont « bons ».
4. On admet que tous les nombres entiers de 24 à 55 sont « bons ».
Qu'en est-il de tout nombre entier supérieur ou égal à 56 ?

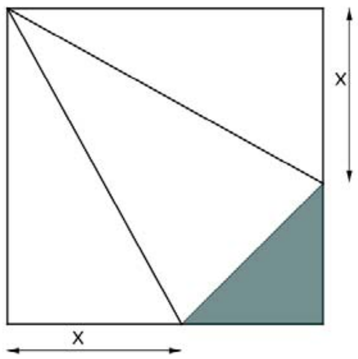
Exercice numéro 2

Un partage équitable



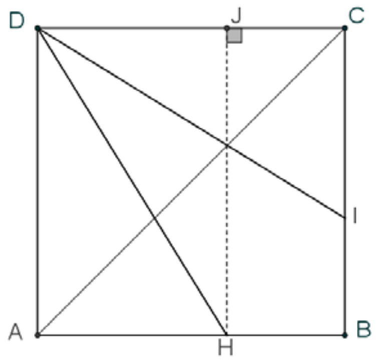
1. Léonard est géomètre. Il veut partager un carré de côté 1 en trois parties de même aire selon le schéma ci-contre.

Quelle valeur doit-il donner à x pour arriver à ses fins ?



2. Mais Léonard est aussi esthète. Ne trouvant pas élégante sa construction, il décide de supprimer la zone triangulaire grisée. Ainsi les trois parties restantes sont triangulaires.

Peuvent-elles avoir la même aire ?



3. Et Léonard est mathématicien. Ayant réalisé grossièrement (ci-contre) la construction de la question 2, il mène du point H la perpendiculaire (HJ) à la droite (AB).
Il a l'impression que les droites (HJ), (DI) et (AC) sont concourantes. Qu'en est-il ?

Exercice numéro 3

Circulez !

Dans un pays se trouvent 5 villes reliées deux à deux par des routes. Il n'y a jamais plus d'une route entre deux villes. Ces routes ne se croisent pas, certaines passant si nécessaire au-dessus d'autres au moyen de ponts. Chaque route est à sens unique.

Des responsables du Ministère du sens de la circulation, manifestement distraits, ont orienté les routes de sorte que si l'on sort d'une ville quelconque, il est impossible d'y revenir.

Un tel réseau de routes entre les 5 villes est dit *catastrophique*.

1. Donner un exemple de réseau catastrophique.

2. Prouver que dans tout réseau catastrophique, il y a une ville dont on ne peut sortir.

3. Prouver que dans tout réseau catastrophique, il y a une ville depuis laquelle on peut atteindre directement toutes les autres.

4. Combien, au minimum, faut-il changer de sens de circulation pour qu'on puisse aller de n'importe quelle ville à n'importe quelle autre (en plusieurs étapes, éventuellement) dans le nouveau réseau routier obtenu ?

5. Prouver qu'il y a exactement 120 réseaux routiers catastrophiques possibles.

Tournez la page S.V.P.

Exercice numéro 4

Carré latin diagonal

Soit n un entier naturel non nul.
On considère un tableau carré à n lignes et n colonnes, dont chaque case contient un entier compris entre 1 et n, de telle sorte qu'il n'y ait pas deux fois le même nombre sur la même ligne, ni sur la même colonne, ni sur chacune des deux diagonales principales. On dit qu'un tel carré est un carré latin diagonal.

On appelle masse du tableau la somme des nombres situés dans les cases en bas à gauche sous la première diagonale (celle qui contient la case située en haut à gauche).
Cette masse est notée M .

1	3	4	5	2
2	4	1	3	5
3	2	5	4	1
5	1	3	2	4
4	5	2	1	3

La figure ci-contre représente un carré latin diagonal à 5 lignes et 5 colonnes. Sa masse est égale à la somme des nombres situés dans les cases grisées : $M = 28$

1. Y a-t-il des carrés latins diagonaux à 2 lignes et 2 colonnes ? à 3 lignes et 3 colonnes ?

2. On s'intéresse aux carrés latins diagonaux à 4 lignes et 4 colonnes.

   - Donner un exemple d'un tel carré et calculer sa masse.
   - Montrer que tout carré latin diagonal de ce type a une masse inférieure à 17.
   - Donner un exemple d'un tel carré latin diagonal de masse 17.
   - Quelle est la valeur minimale de la masse d'un carré latin diagonal à 4 lignes et 4 colonnes ?

3. On s'intéresse aux carrés latins diagonaux à 5 lignes et 5 colonnes.

   - Compléter le carré ci-contre pour obtenir un carré latin diagonal de masse 30 (on expliquera d'abord comment remplir les cases grisées).
   - Donner un exemple de carré latin diagonal à 5 lignes et 5 colonnes de masse 32.
   - Déterminer la valeur maximale de la masse d'un carré latin diagonal à 5 lignes et 5 colonnes.

1				2
		5		4
4				3