MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Olympiades académiques de mathématiques

Mercredi 12 mars 2008

Classes de premières S et S.T.I.

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont autorisées.

Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à faire figurer sur les copies les résultats, même partiels, auxquels ils sont parvenus, et les idées qui leur sont venues.

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE
INRIA ROCQUENCOURT
partenaire de l'académie de Versailles

Exercice numéro 1

Les bons nombres

On dit qu'un nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon » s'il peut s'écrire comme la somme de nombres entiers naturels non nuls, distincts ou non, dont la somme des inverses est égale à 1.
On dit qu'il est « mauvais » s'il n'est pas « bon ».
Ainsi, par exemple :

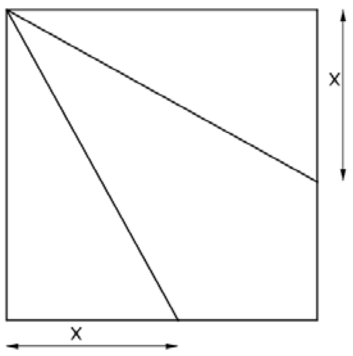
- $2 = 1 + 1$ et $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} \neq 1$, donc 2 est « mauvais » (la seule décomposition possible pour 2 étant 1+1).
- $3 = 1 + 2$ et $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \neq 1$, $3 = 1 + 1 + 1$ et $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \neq 1$, donc 3 est également « mauvais » (les deux décompositions possibles pour 3 ayant été examinées).

1. Déterminer pour chacun des nombres entiers de 4 à 10 s'il est « bon » ou « mauvais ».
2. Montrer que le carré de tout nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon ».
3. Montrer que si n est « bon », alors $2n + 2$ et $2n + 9$ sont « bons ».
4. On admet que tous les nombres entiers de 24 à 55 sont « bons ».

Qu'en est-il de tout nombre entier supérieur ou égal à 56 ?

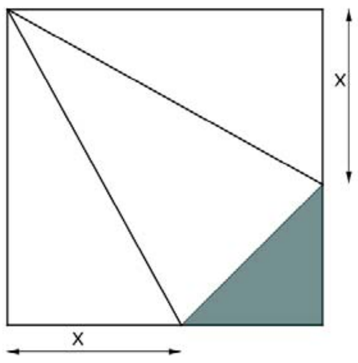
Exercice numéro 2

Un partage équitable



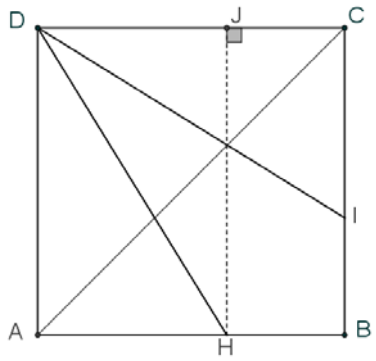
1. Léonard est géomètre. Il veut partager un carré de côté 1 en trois parties de même aire selon le schéma ci-contre.

Quelle valeur doit-il donner à x pour arriver à ses fins ?



2. Mais Léonard est aussi esthète. Ne trouvant pas élégante sa construction, il décide de supprimer la zone triangulaire grisée. Ainsi les trois parties restantes sont triangulaires.

Peuvent-elles avoir la même aire ?



3. Et Léonard est mathématicien. Ayant réalisé grossièrement (ci-contre) la construction de la question 2, il mène du point H la perpendiculaire (HJ) à la droite (AB).
Il a l'impression que les droites (HJ), (DI) et (AC) sont concourantes.
Qu'en est-il ?

Exercice numéro 3

Permutations

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1.
On écrit les nombres entiers, de 1 à n, dans l'ordre croissant puis dans un ordre quelconque. On obtient ainsi deux listes, $L_1 = \{1, 2, ..., n\}$ et $L_2 = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. On calcule ensuite les distances entre 1 et x_1, 2 et x_2, ... n et x_n. Le tableau suivant donne un exemple de permutation et de calcul dans le cas où $n = 5$ (ce n'est pas le seul).

Liste L_1	1	2	3	4	5
Liste L_2	4	2	1	5	3
Distances	3	0	2	1	2

1. Dans le cas où $n = 4$, puis dans le cas où $n = 5$, donner un exemple de liste L_2 telle que toutes les distances soient deux à deux distinctes.

2. On suppose que $n = 6$. Montrer que, quelle que soit la liste L_2, deux des distances obtenues, au moins, sont identiques.

3. Plus généralement, montrer que s'il existe une liste L_2 telle que toutes les distances obtenues soient deux à deux distinctes, alors n est un multiple de 4 ou $(n-1)$ est un multiple de 4.

Tournez la page S.V.P.

Exercice numéro 4

Dominos

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Un damier carré de côté n est divisé en n^2 cases carrées de côté 1.

On recouvre **certaines** de ces cases par des dominos rectangles de largeur 1 et de longueur 2. Chaque domino recouvre exactement deux cases ayant un côté commun (disposées l'une à côté de l'autre ou l'une sous l'autre). Aucun domino ne sort du damier et aucune case n'est recouverte par plus d'un domino. Certaines cases ne sont pas recouvertes, mais il n'est pas possible d'ajouter un domino et aucun des dominos placés ne peut glisser vers une case non recouverte.

Un tel recouvrement est dit *rigide*.

L'objet du problème est d'étudier le nombre maximal de cases non recouvertes dans le cas d'un recouvrement rigide.

1. On considère un recouvrement rigide du damier de côté n.

   a. Prouver qu'il n'y a aucune case non recouverte parmi celles qui forment le bord du damier.

   b. Prouver que dans tout sous-damier de 2×2 cases, il n'y a pas plus d'une case non recouverte.

   c. Prouver que dans tout sous-damier rectangle de 5×2 cases, il n'y a pas plus de deux cases non recouvertes.

2. Donner un exemple de recouvrement rigide du damier carré 7×7 où 5 cases ne sont pas recouvertes.

3. Prouver que dans un recouvrement rigide du damier $n \times n$ il n'y a pas plus de $\frac{n(n+5)}{5}$ cases non recouvertes.

4. Prouver que, pour tout n supérieur ou égal à 7, on peut trouver un recouvrement rigide avec au moins $\frac{(n-6)^2}{5}$ cases non recouvertes.

5. On note $f(n)$ le plus grand nombre de cases non recouvertes dans un recouvrement rigide d'un damier $n \times n$. Vers quelle limite tend $\frac{f(n)}{n^2}$?