Exercice 1
Les bons nombres

1. Pour répondre à cette question, nous ne considérerons que les décompositions des entiers compris entre 4 et 10 en sommes d'entiers ne faisant pas apparaître le nombre 1, attendu que dans ces cas, la somme des inverses des termes de la somme est strictement supérieure à 1.
La seule décomposition de 4 à considérer est :
4 = 2+2, pour laquelle la somme des inverses des termes de la somme est 1. Donc 4 est un bon nombre.
Dans la suite, on peut éliminer les décompositions comportant deux 2.
La seule décomposition de 5 à considérer est :
5 = 3+2, pour laquelle la somme des inverses des termes de la somme est 5/6. Donc 5 est mauvais.
Les décompositions de 6 à considérer sont :
6 = 4+2, pour laquelle la somme des inverses des termes de la somme est 3/4.
6 = 3+3, pour laquelle la somme des inverses des termes de la somme est 2/3. Donc 6 est mauvais.
Les décompositions de 7 à considérer sont :
7 = 5+2, pour laquelle la somme des inverses des termes de la somme est 7/10,
7 = 4+3, pour laquelle la somme des inverses des termes de la somme est 7/12. Donc 7 est mauvais.
Les décompositions de 8 à considérer sont :
8 = 6 + 2, 8 = 3+5, 8 = 4 +4, 8 = 3 + 3 + 2, pour lesquelles la somme des inverses des termes de la somme est différente de 1. Donc 8 est mauvais.
Parmi les décompositions de 9 à considérer figure :
9 = 3+3+3, pour laquelle la somme des inverses des termes de la somme est 1. Donc 9 est un bon nombre.
Dans la suite, on peut éliminer les décompositions comportant trois 3.
Parmi les décompositions de 10 figure :
10 = 4+4+2, pour laquelle la somme des inverses des termes de la somme est 1. Donc 10 est un bon nombre.

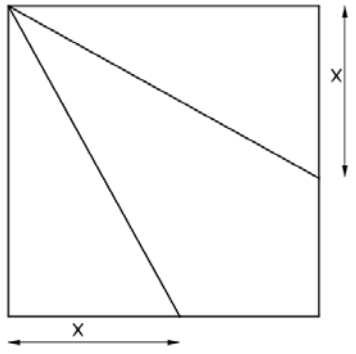
2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on peut écrire : $n^2 = n + n + n +...+ n + n$, somme de n termes. La somme de leurs inverses vaut 1. Donc n^2 est un bon nombre.

3. Si n est un bon nombre, il existe une décomposition $n = a + b + ...+ k$ telle que $1/a + 1/b +...+1/k = 1$. À la décomposition $2n = 2a + 2b +... +2k$ est donc associée la somme 1/2, et donc à la décomposition
$2n + 2 = 2a + 2b +... +2k + 2$ la somme 1. $2n +2$ est donc un bon nombre.
La même décomposition de $2n$, associée à la décomposition 9 = 3 + 6, conduit au résultat : $2n + 9$ est un bon nombre.

4. On peut écrire : $56 = 2\times27 +2$ et $57 = 2\times24 + 9$. Ces deux nombres sont donc bons. Tous les nombres pairs supérieurs à 56 sont donc bons. Il en est de même des nombres impairs supérieurs à 57.

Exercice numéro 2

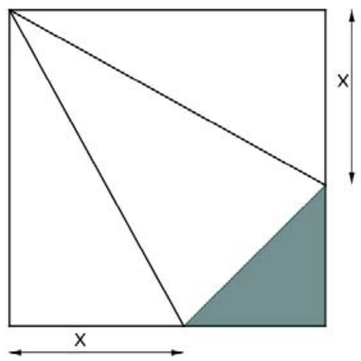
Un partage équitable



1. L'aire de chaque triangle rectangle de côté x est $A = \frac{x}{2}$. On écrit l'égalité entre l'aire de la partie médiane et A :

$$\frac{x}{2} = 1 - 2\times\frac{x}{2}.$$

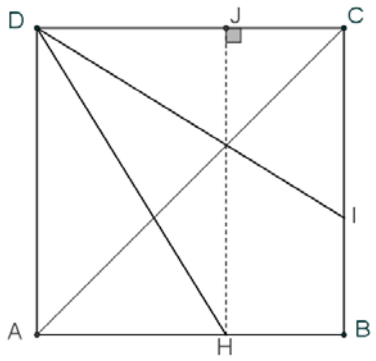
La solution de cette équation est $\frac{2}{3}$.



2. La même condition s'écrit cette fois :

$$1-\frac{(1-x)^2}{2}=3\frac{x}{2},$$

Dont la solution positive est $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

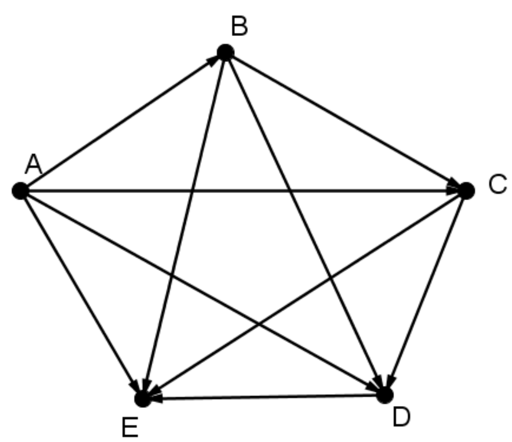


3. On se place dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$ et on cherche si le point d'intersection de (AC) et (DI) a la même abscisse que H. Une équation de (AC) est $y=x$, une équation de (DI) est $y-1=x\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$. Le point d'intersection de ces droites a pour abscisse $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, celle de H. Il y a bien concours.

Exercice numéro 3

Circulez !

1. La figure ci-contre donne un exemple de réseau catastrophique.



2. Supposons qu'on puisse sortir de toute ville. Partons de A et allons à B (le fait de suivre l'ordre alphabétique n'enlève rien à la généralité). On peut sortir de B, par hypothèse, et on ne peut pas aller à A, d'après l'énoncé. Allons donc à C. On peut sortir de C, mais pas pour aller à A ni pour aller à B. On peut aller à D. De D on peut sortir mais seulement pour aller à E... d'où on ne peut sortir puisque ce serait pour aller à une ville dont on est sorti. Il y a donc une contradiction : dans tout réseau catastrophique, il y a une ville dont on ne peut sortir.

3. Dans un réseau catastrophique, il y a une ville dont on ne peut sortir, E par exemple. Le réseau des quatre villes A, B, C et D est un réseau catastrophique de 4 villes. Les raisonnements faits pour 5 valent pour 4. Il y a donc dans ce sous-réseau une ville dont on ne peut sortir, D par exemple. On recommence jusqu'au réseau de 2 villes A et B ; on ne peut sortir de l'une des deux, et de l'autre on peut atteindre toutes les villes précédemment examinées.

4. Supposons, comme dans l'exemple ci-dessus, que de A on puisse aller directement à toute autre ville et que de toute autre ville on puisse aller directement à E. Changeons le sens de circulation de la route

qui va de A à E et faisons-la aller de E à A. On peut alors aller de A à toute autre ville, y compris E avec une étape. On peut aller de B à toute autre ville (pour aller à A on passe par E), de C à toute autre ville (pour aller à A on passe par E, pour aller à B on passe par E et A), de D à toute autre ville en passant par E et A éventuellement, et enfon de E à toute autre ville en passant par A. La réponse est donc : une.

5. Les raisonnements précédents montrent que tous les réseaux catastrophiques sont identiques à une permutation des lettres près. Il y en a donc 5×4×3×2×1 soit 120.

Exercice numéro 4

Carré latin diagonal

1. Non. Écrire la première ligne en utilisant l'ordre arbitraire 1, 2 ou 1, 2, 3. L'impossibilité apparaît au nombre suivant dans le cas 2×2, dès qu'on a écrit une colonne ou une diagonale dans le cas 3×3.

2. Carrés latins diagonaux à 4 lignes et 4 colonnes

4	2	3	1
3	1	4	2
1	3	2	4
2	4	1	3

Ce carré latin diagonal a pour masse 14.
Sous la première diagonale d'un carré latin diagonal, il y a 6 cases. Le nombre situé dans première colonne et la quatrième ligne ne peut être répété ni sur sa ligne, ni sur sa colonne, ni sur sa diagonale. Il n'apparaît donc qu'une fois. Les trois nombres situés exactement sous la première diagonale ne peuvent être égaux, car alors il faudrait en mettre un sur la première ligne et la quatrième colonne, et donc sur la deuxième diagonale où il y en a déjà un. Il peut donc y en avoir au maximum deux d'une sorte, un d'une autre. Il reste deux nombres à placer. Quoi qu'on fasse, la répartition des six nombres est 2, 2, 1 et 1. Au maximum, on a donc deux 4, deux 3, un 2 et un 1. Le total est 17.

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

Ce carré latin diagonal a pour masse 17.

Le raisonnement fait plus haut pour le maximum vaut pour le minimum, qui est donc 2×1+2×2+1×3+1×4 = 13.

Voici un carré latin diagonal de masse 13 :

3	4	1	2
1	2	3	4
2	1	4	1
4	3	2	1

3. Carré latins diagonaux 5×5
Voici un carré latin diagonal 5×5 de masse 30.

1	5	3	4	2
3	4	2	1	5
2	1	5	3	4
5	3	4	2	1
4	2	1	5	3

Un carré latin diagonal 5×5 de masse 32 :

1	2	3	5	4
3	4	2	1	5
4	1	5	3	2
5	3	4	2	1
2	5	1	4	3

Masse d’un carré latin diagonal 5×5 :

	4			5
5				4
4	5			
		4	5	
		5	4	

Comme il y a quatre colonnes à occuper, on utilisera au moins 4 chiffres distincts. Mais si les cases à occuper dans la première colonne et dans la quatrième ligne sont occupées par les quatre mêmes chiffres, le cinquième se trouve deux fois dans la diagonale principale (aux deux bouts). Donc il faut utiliser les 5 chiffres.
Si on utilise quatre fois un même chiffre, il apparaît dans 4 lignes et 4 colonnes. On ne peut donc pas placer ce chiffre sur la diagonale principale (il n’est ni à une extrémité, ni dans les colonnes 2 et 3, ni dans les lignes 3 et 4). Donc chaque chiffre est utilisé au maximum 3 fois.
Peut-on utiliser deux fois trois chiffres identiques ?
Pour utiliser trois chiffres 5, par exemple, comme dans le carré représenté ci-dessus, on ne peut les disposer tous les trois sur les trois dernières lignes et les trois premières colonnes, car alors les deux restants sont dans le carré 2×2 en haut à droite et alors il y en a deux ou aucun sur la seconde diagonale. Donc un de ces chiffres est sur la deuxième ligne ou la quatrième colonne. Si cela est, par exemple sur la deuxième ligne comme ci-dessus, alors aucun autre 5 ne peut se trouver à l’intersection de la quatrième ligne et de la deuxième colonne, car avec le troisième 5 à placer, la diagonale principale ne peut plus accueillir de 5. Ils ne peuvent être tous les trois sur la sous-diagonale pour la même raison. La disposition des 5 ci-dessus est, à une symétrie près, la seule qui permette de placer des 5 sur les 5 lignes, les 5 colonnes et les deux diagonales.
Mais alors il n’est pas possible de faire la même chose avec un autre chiffre, car on ne peut en placer un exemplaire sur chacune des diagonales.

On peut donc placer trois chiffres d’une sorte, trois fois deux chiffres d’autres sortes et enfin un chiffre, comme sur la figure ci-contre. Le maximum est donc : 3×5 + 2×4 +2×3 +2×2 + 1 = 34.

4	2	1	3	5
5	1	4	2	3
2	5	3	1	4
3	4	2	5	1
1	3	5	4	2