



Académie de Versailles

Olympiades académiques de mathématiques Classes de première (séries S.T.G., E.S. et L)

Concours 2007

Mercredi 14 mars 2007

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont autorisées.

Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à faire figurer sur les copies les résultats, même partiels, auxquels ils sont parvenus, et les idées qui leur sont venues.

INSTITUT NATIONAL
DE RECHERCHE
EN INFORMATIQUE
ET EN AUTOMATIQUE



Partenaire de l'académie de Versailles

Exercice numéro 1

Un problème de tas

On dispose de 7 objets que l'on répartit en autant de tas que l'on veut, chaque tas contenant autant d'objets que l'on veut.

Une manipulation consiste à enlever un objet de chaque tas et à faire un nouveau tas des objets ainsi récupérés.

Exemple : Une répartition possible au départ sera notée (4, 3).

Cela signifie qu'on a deux tas, l'un de 4 objets et l'autre de 3 objets.

Après une manipulation, on obtiendra donc la répartition (3, 2, 2)

Avertissement : On considère que les répartitions (4, 3) et (3, 4) sont identiques.

De même les répartitions (3, 2, 2), (2, 3, 2) et (2, 2, 3) sont identiques.

1. On place les 7 objets en un seul tas ; la répartition est donc (7).
Quelle répartition obtiendra-t-on après 3 manipulations ? Après 7 manipulations ? Après 11 manipulations ? Après 2007 manipulations ?
2. Ici, on ne connaît pas la répartition initiale, mais après 2007 manipulations, on obtient la répartition (4, 2, 1).

Indiquer toutes les répartitions initiales possibles.
3. Paul et Virginie jouent ensemble.

Au départ, Paul dispose les objets sans montrer la répartition à Virginie.

Puis il simule sur son ordinateur 2007 manipulations et ne montre à Virginie que la répartition finale. Il demande alors à Virginie de deviner la répartition initiale. Virginie réfléchit et avoue ne pas savoir répondre car elle hésite entre trois répartitions.

Sachant que Virginie a raisonné correctement, quelle répartition finale a-t-elle vue ?

Exercice numéro 2

Des trapèzes de même aire

Le but de cet exercice est de déterminer les trapèzes rectangles qui, sous certaines conditions de distances et d'angles, sont partagés en deux trapèzes de même aire par une parallèle donnée à leurs bases.

1. Question préliminaire :

Existe-t-il un couple d'entiers naturels (m, p) tel que : $m^2 - p^2 = 8$?

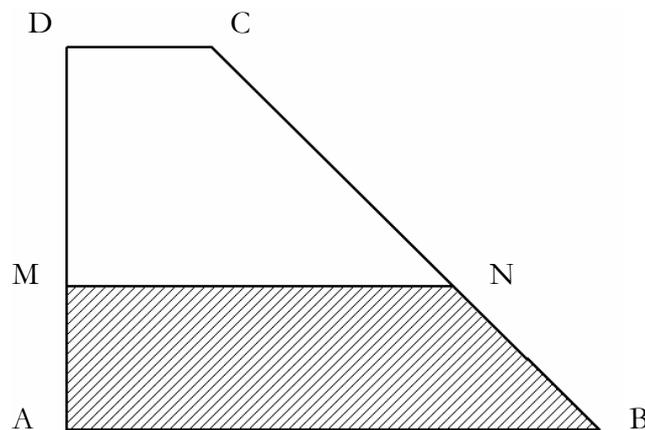
En existe-t-il plusieurs ?

(Le résultat de cette question peut être exploité dans la suite de l'exercice, selon la méthode utilisée pour la traiter).

2. On considère les trapèzes rectangles ABCD de bases $[AB]$ et $[CD]$ tels que :

- $\widehat{ABC} = 45^\circ$.
- les distances AB, AD et CD sont des nombres entiers, et $AD > 2$.

Soit M le point du segment $[AD]$ tel que $AM = 2$.



Déterminer les distances AB, AD et CD de sorte que les aires des trapèzes MNBA et MNCD soient égales.

Indication : On pourra faire apparaître sur la figure des triangles isocèles.

Exercice numéro 3 (concours STG, ES et L)

Rallye numérique

On choisit un nombre, puis on a le choix entre :

- lui ajouter 3 ;
- le multiplier par 5.

On recommence avec le nombre obtenu, et ainsi de suite.

1. Partant du nombre 1, est-il possible d'obtenir 2007 au bout d'un certain nombre d'étapes ?
2. Trouver l'ensemble des entiers qu'on peut prendre au départ pour obtenir 2007 en un certain nombre d'étapes.
3. Quel est le nombre minimum d'étapes nécessaires pour parvenir à 2007 en partant de 3 ?

Exercice numéro 4 (concours STG, ES et L)

Bonnes affaires

Une chaîne de magasins fait la proposition suivante :

« Pour tout achat d'un montant minimum de 60 euros, un bon d'achat de 10 euros est offert, utilisable sur un achat d'un montant minimum de 40 euros ».

1. On effectue deux achats successifs, l'un de 60 euros, l'autre de 40 euros. Quelle réduction, exprimée en pourcentage, a été consentie sur l'ensemble de ces achats ?
2. Quelle est, en pourcentage, la réduction consentie sur deux achats successifs de 60 euros ?
3. Un client décide d'effectuer des achats successifs de 60 euros.
 - a. Quelle est, en pourcentage, la réduction consentie sur trois achats successifs ? Sur quatre achats ?
 - b. La déduction obtenue sur une série d'achats successifs a-t-elle une limite ?