Académie de Versailles

Olympiades académiques de mathématiques
Classes de première (séries S et S.T.I.)

Concours 2007

***

Mercredi 14 mars 2007

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont autorisées.

***

Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à faire figurer sur les copies les résultats, même partiels, auxquels ils sont parvenus, et les idées qui leur sont venues.

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE
INRIA ROCQUENCOURT
Partenaire de l'académie de Versailles

Exercice numéro 1

Un problème de tas

On dispose de 7 objets que l'on répartit en autant de tas que l'on veut, chaque tas contenant autant d'objets que l'on veut.
Une manipulation consiste à enlever un objet de chaque tas et à faire un nouveau tas des objets ainsi récupérés.

Exemple : Une répartition possible au départ sera notée (4, 3).
Cela signifie qu'on a deux tas, l'un de 4 objets et l'autre de 3 objets.
Après une manipulation, on obtiendra donc la répartition (3, 2, 2)

Avertissement : On considère que les répartitions (4, 3) et (3, 4) sont identiques.
De même les répartitions (3, 2, 2), (2, 3, 2) et (2, 2, 3) sont identiques.

1. On place les 7 objets en un seul tas ; la répartition est donc (7).
   Quelle répartition obtiendra-t-on après 3 manipulations ? Après 7 manipulations ? Après 11 manipulations ? Après 2007 manipulations ?

2. Ici, on ne connaît pas la répartition initiale, mais après 2007 manipulations, on obtient la répartition (4, 2, 1).

   Indiquer toutes les répartitions initiales possibles.

3. Paul et Virginie jouent ensemble.

   Au départ, Paul dispose les objets sans montrer la répartition à Virginie.
   Puis il simule sur son ordinateur 2007 manipulations et ne montre à Virginie que la répartition finale. Il demande alors à Virginie de deviner la répartition initiale. Virginie réfléchit et avoue ne pas savoir répondre car elle hésite entre trois répartitions.

   Sachant que Virginie a raisonné correctement, quelle répartition finale a-t-elle vue ?

Exercice numéro 2

Des trapèzes de même aire

Le but de cet exercice est de déterminer les trapèzes rectangles qui, sous certaines conditions de distances et d'angles, sont partagés en deux trapèzes de même aire par une parallèle donnée à leurs bases.

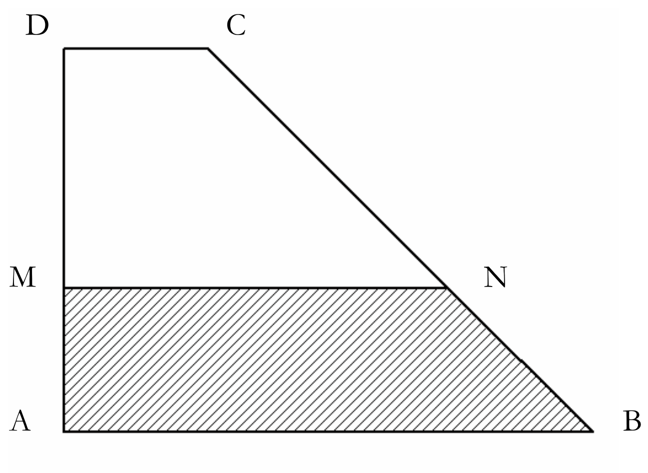
1. Question préliminaire :

Existe-t-il un couple d'entiers naturels (m, p) tel que : $m^2 - p^2 = 8$?
En existe-t-il plusieurs ?
(Le résultat de cette question peut être exploité dans la suite de l'exercice, selon la méthode utilisée pour la traiter).

2. On considère les trapèzes rectangles ABCD de bases $[\mathrm{AB}]$ et $[\mathrm{CD}]$ tels que :

   - $\widehat{\mathrm{ABC}} = 45°$.
   - les distances AB, AD et CD sont des nombres entiers, et $\mathrm{AD} > 2$.

   Soit M le point du segment $[\mathrm{AD}]$ tel que $\mathrm{AM} = 2$.



Déterminer les distances AB, AD et CD de sorte que les aires des trapèzes MNBA et MNCD soient égales.

Indication : On pourra faire apparaître sur la figure des triangles isocèles.

Exercice numéro 3 (concours S et STI)

Géométrie de l'à peu près

Le plan est muni d'une distance.

On donne les définitions suivantes :
Définition 1 : Deux points sont *presque égaux* si leur distance est inférieure à 0,1 (un dixième d'unité) ;
Définition 2 : Deux segments ont *presque la même longueur* si leurs longueurs diffèrent de moins de 0,1 ;
Définition 3 : Un triangle est *presque équilatéral* si ses côtés ont presque la même longueur deux à deux.

1. Un triangle rectangle ABC dont l'hypoténuse [BC] a pour longueur 1 peut-il être presque équilatéral ?

2. Un triangle rectangle peut-il être presque équilatéral ?

3. On considère un segment [BC] de longueur 2, on note I le milieu de [BC]. À tout point A du plan tel que AB = 2, on associe son projeté orthogonal H sur la droite (BC).

   a. Quel est l'ensemble des points A tels que I et H soient presque égaux ?
   b. Si I est presque égal à H, le triangle ABC est-il presque équilatéral ?

Exercice numéro 4 (concours S et STI)

Comment débutent les puissances de 2 ?

Étant donné un entier naturel n, on considère l'ensemble des puissances de 2 comprises, au sens large, entre 1 et 2^n.

On note α_n le nombre de ces puissances dont l'écriture décimale débute par 1, par 2 ou par 3.
On note β_n le nombre de ces puissances dont l'écriture décimale débute par 4, par 5, par 6 ou par 7.
On note γ_n le nombre de ces puissances dont l'écriture décimale débute par 8 ou par 9.

1. Déterminer α_{15} et β_{15}.
2. Que peut-on conjecturer de la limite éventuelle de $\dfrac{\beta_n}{\alpha_n}$?
3. Démontrer ce résultat (on pourra montrer que, pour tout entier n, $\alpha_n - 2 \leqslant 2\beta_n \leqslant \alpha_n$).