Olympiades académiques de mathématiques
Concours 2007

Éléments de solution

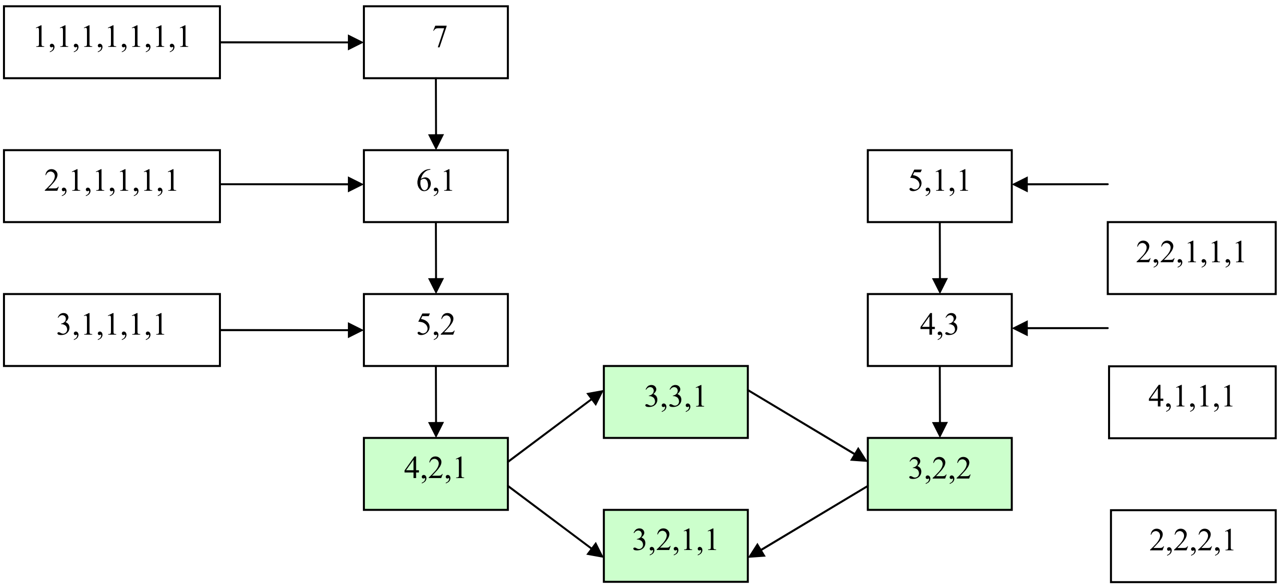
(Les exercices 1 et 2, communs à tous les candidats, sont proposés par la cellule nationale)

***

Exercice 1

Un problème de tas

Le graphe ci-dessous donne l'évolution des répartitions à partir d'une répartition quelconque :



1. En partant de la répartition (7), en trois manipulations on obtient la répartition (4,2,1). Quatre manipulations redonnent à nouveau (4,2,1) et ainsi de suite. Comme 2007 = 501 x 4 + 3 , après 2007 manipulations, on aura encore la répartition $\boxed{(4,2,1)}$.

2. On raisonne de même qu'en question 1, mais en sens contraire et en tenant compte du fait qu'au bout de quelques manipulations on rentre dans le cycle des quatre répartitions en vert sur le graphique, et que par ailleurs 2007 manipulations reviennent en général à 3 manipulations. Pour chacune des quatre répartitions du cycle (en vert), on peut déterminer quelles répartitions initiales permettent d'y aboutir en 2007 (c'est-à-dire en 3) manipulations. Il suffit donc de remonter de trois flèches. On obtient donc le résultat suivant :

Les répartitions initiales suivantes…	aboutissent en 2007 manipulations à
(7) (2,1,1,1,1,1) (3,3,1) (4,3)	(4,2,1)
(6,1) (3,1,1,1,1) (3,2,2)	(3,3,1)
(5,2) (3,2,1,1) (2,2,1,1,1) (2,2,2,1)	(3,2,2)
(4,2,1) (5,1,1) (4,1,1,1) ((1,1,1,1,1,1,1)	(3,2,1,1)

… et la réponse à la question posée.

3. Et pour la question 3, seule la répartition finale $\boxed{(3,3,1)}$ pouvait faire hésiter Virginie entre trois répartitions initiales.

Exercice 2

Des trapèzes de même aire

1. De l'égalité $m^2-p^2=8$, on déduit (*) : $m^2=p^2+8$ donc : $p<m<p+3$, et $m=p+1$ ou $m=p+2$.
Avec $m=p+1$, (*) est impossible. Avec $m=p+2$, il vient $p=1$ et $m=3$.

2. Une étude simple de la figure (à partir de triangles rectangles isocèles par exemple) permet d'établir que :
DC= AB-AD ; MN=AB-2
L'égalité des aires conduit alors à : $(AB-4)^2-(AD-AB)^2=8$.
On obtient avec 1) : AB=7, AD=6, DC=1.

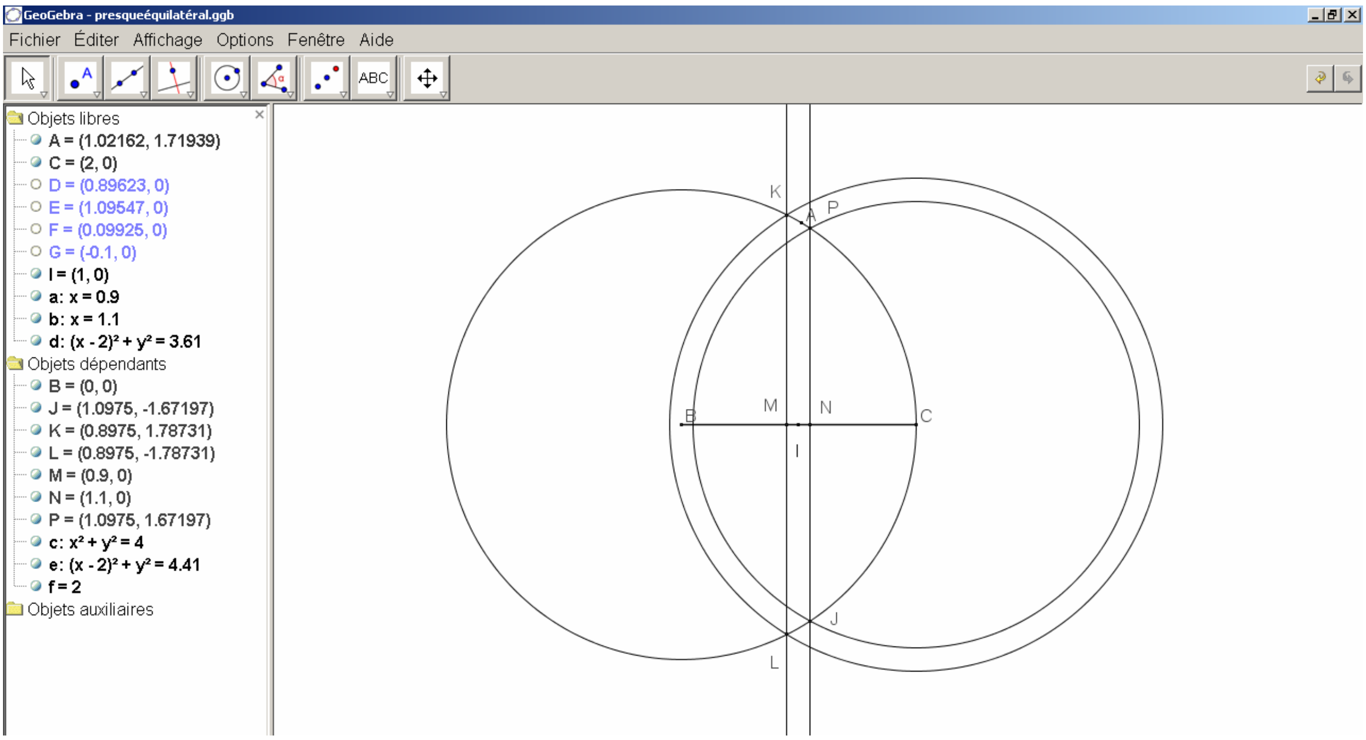
On peut aussi travailler à partir d'un pavage du « grand » triangle obtenu en prolongeant (AD) et (BC).

Exercice 3

Géométrie de l'à peu près

1. Si x et y sont les longueurs des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle dont les mesures diffèrent de 1 de moins de 0,1, alors la somme de leurs carrés est strictement supérieure à 1,21.
2. Pour peu que ses côtés soient assez petits …
3. *a.* Cet ensemble est la réunion de deux arcs du cercle de centre B et de rayon 2.

b. Le triangle ABC est presque équilatéral si et seulement si la longueur CA est comprise entre 1,9 et 2,1, c'est-à-dire si le point A appartient à la réunion de deux arcs du cercle de centre B et de rayon 2. Ces arcs ne sont pas égaux aux précédents.



Exercice 4

Comment débutent les puissances de 2 ?

1. On lit $\alpha_{15} = 10, \beta_{15} = 4$
2. En allant plus loin, il semble que $\frac{\alpha_{15}}{\beta_{15}}$ tende vers 2.
3. Chaque puissance de 2 commençant par 4, 5, 6 ou 7 est suivie de deux puissances commençant par 1, 2 ou 3 (et éventuellement d'une commençant par 8 ou 9) avant que cette occurrence se reproduise. Comme la liste débute par deux puissances commençant par 1 et 2 (ce sont d'ailleurs 1 et 2), où qu'on s'arrête on peut écrire :
$$\alpha_n - 2 \leqslant 2\beta_n \leqslant \alpha_n .$$
   Cette inégalité a lieu pour tout n.

   On passe au quotient : pour tout n on a $\frac{1}{2} - \frac{2}{\alpha_n} \leqslant \frac{\beta_n}{\alpha_n} \leqslant \frac{1}{2}$. On conclut en tenant compte de la limite infinie de la suite (α_n).