Académie de Versailles

Olympiades académiques de mathématiques

Concours 2006

***

Mercredi 15 mars 2006

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont autorisées.

***

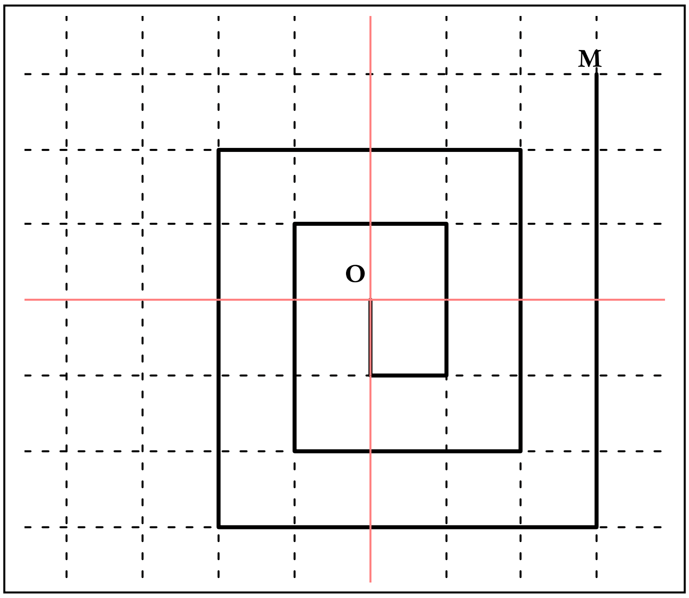
Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à faire figurer sur les copies les résultats, même partiels, auxquels ils sont parvenus, et les idées qui leur sont venues.

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE INRIA ROCQUENCOURT
partenaire de l'académie de Versailles

Exercice numéro 1

La « spirale »

Le plan, muni d'un repère orthonormal d'origine O (unité 1 cm), est quadrillé par les droites parallèles aux axes de coordonnées et passant par tous les points à coordonnées entières du plan. Sur ce quadrillage on construit, en partant du point O vers le bas, une ligne brisée en forme de « spirale » qui « tourne dans le sens contraire des aiguilles d'une montre », conformément au dessin ci-dessous.
Pour tout point M à coordonnées entières, on note $\ell(\mathrm{M})$ la longueur de la portion de « spirale » qui va du point O jusqu'au point M.



1) Soit A un point de l'axe des abscisses tel que OA=5.
   Déterminer les valeurs possibles de $\ell(\mathrm{A})$.

2) Soit B le point de coordonnées (2005 ; 2006).
   Déterminer $\ell(\mathrm{B})$.

3) Déterminer les coordonnées du point C tel que $\ell(\mathrm{C})$ =2006.

4) La « spirale » passe-t-elle effectivement par tous les points à coordonnées entières du plan ?

On rappelle le résultat suivant :

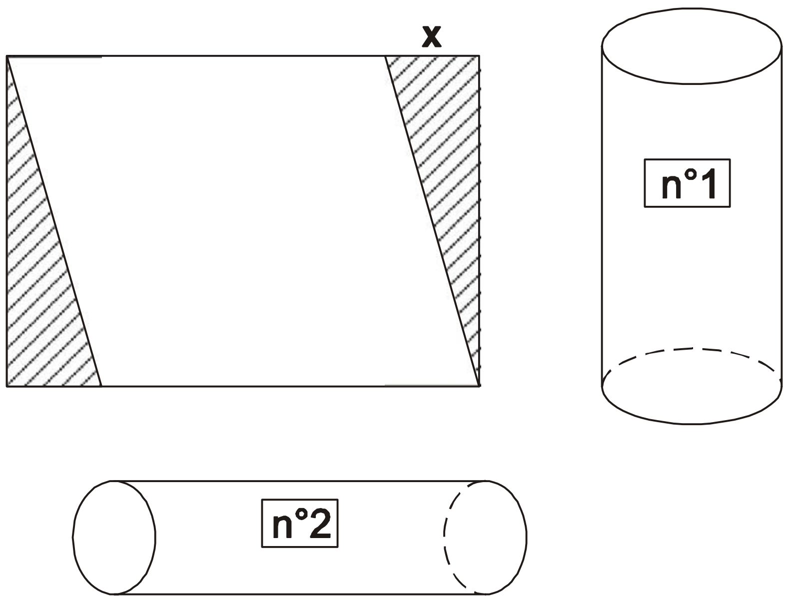
Pour tout entier naturel n non nul, $1+2+3+\ldots+n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$

Exercice numéro 2

Les cylindres en papier

1. On prend une feuille de papier de 21 cm de large et 29,7 cm de long (le format A4). On forme un cylindre en roulant la feuille de papier et en faisant coïncider deux bords opposés. En faisant de même avec les deux autres bords opposés, on obtient un autre cylindre.
Les deux cylindres ont-ils même volume ?

2. Dans une feuille de papier de format A4, on enlève deux triangles de mêmes dimensions selon la figure ci-dessous :



Si on roule la feuille restante bord à bord, on obtient un premier cylindre (n°1). Si on la roule en faisant coïncider les autres bords opposés, on obtient un second cylindre (n°2).

Trouver la ou les valeurs de **x** (en cm) pour que les deux cylindres ainsi obtenus aient le même volume.

Exercice numéro 3 (concours S et STI)

On considère un polygone régulier convexe à 1 000 sommets, chacun étant coloré soit en rouge, soit en vert, soit en bleu. Une *opération* consiste à choisir deux sommets consécutifs n'ayant pas la même couleur et à les recolorer en attribuant à chacun la troisième couleur.

1. Prouver que, quelle que soit la coloration initiale et à l'aide d'un nombre fini d'opérations successives, il est possible de se ramener à une coloration des 1 000 sommets qui n'utilise pas plus de deux couleurs.

2. Un *bloc* est un ensemble de quatre sommets consécutifs. Si ces quatre sommets sont de la même couleur, on dit que le bloc est *monochrome*.

   a. Prouver que tout bloc peut être transformé en un bloc monochrome à l'aide d'un nombre fini d'opérations, et ce, sans modifier la couleur des sommets qui ne sont pas dans le bloc considéré.
   b. Prouver que, si deux blocs monochromes sans sommet commun sont consécutifs, on peut échanger leurs couleurs en un nombre fini d'opérations.
   c. Prouver que l'on dispose sur les blocs monochromes d'une opération analogue à celle définie sur les sommets.
   d. Prouver que, quelle que soit la coloration initiale et à l'aide d'un nombre fini d'opérations successives, il est possible de se ramener à une coloration des 1 000 sommets qui n'utilise qu'une seule couleur.

Exercice numéro 4 (concours S et STI)

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a et de centre O.
On considère un point M du segment [AB]. On pose x = AM. Si les droites (MO) et (AC) sont sécantes, on appelle N leur point d'intersection.

1. Quel est l'ensemble I des réels x pour lesquels N appartient au segment [AC] ?

2. Pour tout x élément de I, on note $S(x)$ l'aire du triangle AMN. Quelles sont les valeurs minimale et maximale de $S(x)$?