Olympiades de mathématiques de première

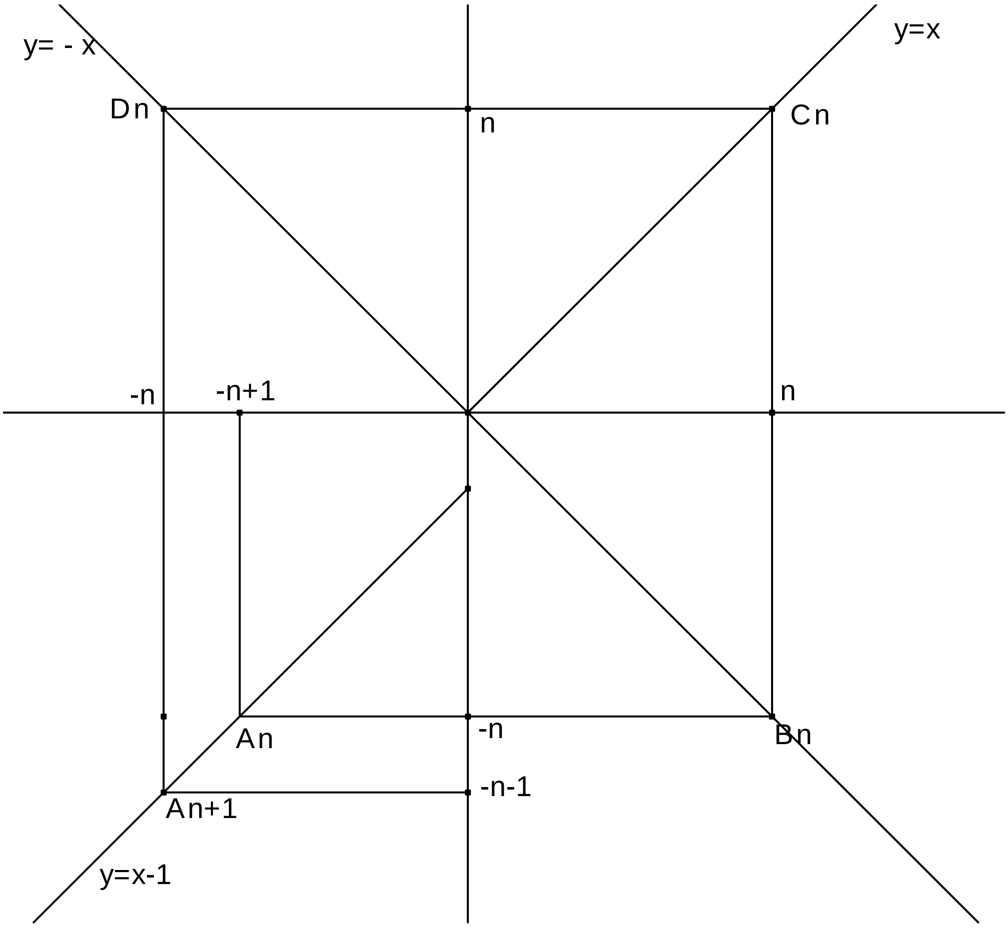
Session 2006, académie de Versailles

Éléments de solution

1. Exercices communs à tous les candidats (rédigés par la commission nationale, corrigé proposé par la commission nationale)

Exercice 1 : La « spirale »

Commençons par des considérations générales.



Notons que la spirale est une réunion de segments dont les sommets sont situés sur trois droites D_1, D_2 et D_3 dont les équations sont simples à trouver, à savoir dans l'ordre où elles ont à intervenir : $y = x - 1$ (D_1), $y = -x$ (D_2) et $y = x$ (D_3) .

Notons A_n le point de D_1 d'ordonnée $-n$: il a pour coordonnées : $(-n+1,-n)$.

B_n le point de D_2 d'ordonnée $-n$: il a pour coordonnées : $(n,-n)$.

C_n le point de D_3 d'ordonnée n : il a pour coordonnées : (n,n).

D_n le point de $\mathcal{D}_2$ d'ordonnée n : il a pour coordonnées : $(-n, n)$.

La spirale n'est alors rien d'autre que la réunion pour $n \in \mathbb{N}^*$ des segments

$$[D_{n-1}A_n], [A_nB_n], [B_nC_n] \text{ et } [C_nD_n]$$

de longueurs respectives $2n-1$, $2n-1$, $2n$ et $2n$.

Le point O peut être considéré comme le point D_0.

On conjecture facilement que les points A_n et C_n ont sont tels que :

$$\boxed{l(A_n) = (2n-1)^2} \quad \text{et} \quad \boxed{l(C_n) = (2n)^2}$$

Démontrons-le :

$$\begin{aligned} l(A_n) &= OA_1 + A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1A_2 + \ldots + B_{n-1}C_{n-1} + C_{n-1}D_{n-1} + D_{n-1}A_n \\ &= 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + \ldots + (2n-2) + (2n-2) + (2n-1) \\ &= 2.\big(1 + 2 + 3 + \ldots + (2n-2)\big) + (2n-1)\big) \\ &= 2.\frac{(2n-2)(2n-1)}{2} + (2n-1)\big) = (2n-2)(2n-1) + (2n-1) \\ &= (2n-1)\big((2n-2)+1\big) = (2n-1)^2 \end{aligned}$$

et $l(C_n) = l(A_n) + A_nB_n + B_nC_n = (2n-1)^2 + (2n-1) + 2n = 4n^2 = (2n)^2$

1. Il existe deux points *A* de l'axe des abscisses tels que $OA = 5$, l'un d'abscisse 5, l'autre d'abscisse -5.

   $\boxed{1^{\text{ier}} \text{ cas : } A(5,0)}$

   Ce point est sur le segment $[B_5C_5]$;

   en effet on a $B_5(5,-5)$ et $C_5(5,5)$ avec $AC_5 = 5$.

   Ainsi $l(A) = l(C_5) - 5 = 10^2 - 5 = \boxed{95}$.

   $\boxed{2^{\text{ième}} \text{ cas : } A'(-5,0)}$

   Ce point est sur le segment $[D_5A_6]$ ($D_5(-5,5)$, $A_6(-5,-6)$;) avec $A'A_6 = 6$.

   Ainsi $l(A') = l(A_6) - 6 = 11^2 - 6 = \boxed{115}$.

2. $B(2005,2006)$ est sur le segment $[C_{2006}D_{2006}]$;

   en effet on a $C_{2006}(2006,2006)$ et $D_5(-2006,2006)$ avec $C_{2006}B = 1$.

   Ainsi $l(B) = l(C_{2006}) + 1 = 4012^2 + 1 = \boxed{16\ 096\ 145}$.

3. On cherche ici le point *C* tel que $l(C) = 2006$.

   Or, la suite des nombres

   $$l(O) = 0,\ l(A_1) = 1,\ l(C_1) = 4,\ l(A_2) = 9,\ l(C_2) = 16, \ldots,$$
   $$\ldots\ l(A_n) = (2n-1)^2,\ l(C_n) = (2n)^2$$

   est la suite des carrés des entiers naturels (ou « carrés parfaits »).
   Il suffit donc d'abord d'encadrer 2006 par deux carrés parfaits successifs :

   $$l(C_{22}) = 44^2 = 1936 < 2006 < 2025 = 45^2 = l(A_{23}).$$

   De plus $C_{22}D_{22} = 44$ donc

$$l(D_{22}) = 1936 + 44 = 1980 < 2006 < 2025 = 45^2 = l(A_{23})$$

donc $C \in [D_{22}A_{23}]$.

Enfin : $2006 - 1980 = 26$ donc $\begin{cases} x_C = -22 = x_{D_{22}} = x_{A_{23}} \\ y_c = x_{D_{22}} - 26 = 22 - 26 = -4 \end{cases}$

Donc C a pour coordonnées $\boxed{(-22,-4)}$.

4. Soit $D(p,q)$ un point à coordonnées entières.
   Eliminons immédiatement le cas où $p = q = 0$ auquel cas $D = O$.
   Notons $n = \max(|p|,|q|)$.
   $\boxed{\text{Si } n = |p|}$ alors $|q| \leqslant n$ donc $-n \leqslant q \leqslant n$ et $p \in \{-n,n\}$.
   Si $p = n$ alors $D(n,q)$ avec $-n \leqslant q \leqslant n$ est sur le segment $[B_nC_n]$
   car $\begin{cases} x_{B_n} = x_D = n = x_{C_n} \\ y_{B_n} = -n \leqslant y_D \leqslant y_{C_n} = n \end{cases}$
   Si $p = -n$ alors $D(-n,q)$ avec $-n \leqslant q \leqslant n$ est sur le segment $[D_nA_{n+1}]$
   car $\begin{cases} x_{A_{n+1}} = x_D = -n = x_{D_n} \\ y_{A_{n+1}} = -n - 1 < -n \leqslant y_D \leqslant y_{D_n} = n \end{cases}$
   $\boxed{\text{Si } n \neq |p|}$ alors $|p| < |q| = \max(|p|,|q|) = n$:
   par suite $|p| < n$ donc $-n < p < n$ et $q \in \{-n,n\}$.
   Si $q = n$ alors $D(p,n)$ avec $-n < p < n$ est sur le segment $[C_nD_n]$
   car $\begin{cases} x_{D_n} = -n < x_D = p < n = x_{C_n} \\ y_{D_n} = y_D = n = y_{C_n} \end{cases}$
   Si $q = -n$ alors $D(p,-n)$ avec $-n < p < n$ est sur le segment $[A_nB_n]$
   car $\begin{cases} x_{A_n} = -n + 1 \leqslant x_D = p < n = x_{B_n} \\ y_{A_n} = y_D = -n = y_{B_n} \end{cases}$
   Ainsi <u>dans tous les cas *D* est sur un des segments qui constituent la spirale</u>.

<u>Exercice 2 : les cylindres en papier</u>

Commençons par des considérations générales qui serviront tout au long de l'exercice.

Pour un cylindre dont la hauteur est *h*, le rayon de base *R* et la surface de base *B*, la formule donnant le volume est : $V = B \times h = \pi R^2 h$.
Pour un cercle de rayon *R*, la formule donnant le périmètre est $p = 2\pi R$.
Si le cylindre est formé à partir d'un rectangle ou d'un parallélogramme de base *a* qu'on enroulera et de hauteur *b* qui sera aussi la hauteur du cylindre, on aura :

$a = 2\pi R$ d'où $R = \dfrac{a}{2\pi}$ puis $V = \pi\left(\dfrac{a}{2\pi}\right)^2 b$ soit $\boxed{V = \dfrac{1}{4\pi}a^2b}$.

1. Prenons une feuille de papier de 21 cm de large ($l = 21$) et 29,7 cm de long ($L = 29,7$)
   Notons $a = 21 = l$ et $b = 29,7 = L$.

Selon la façon dont on roule la feuille pour obtenir un cylindre, le volume sera :

$$\boxed{V_1 = \frac{1}{4\pi} L^2 l} \quad \text{ou} \quad \boxed{V_2 = \frac{1}{4\pi} l^2 L}$$

Ainsi $\frac{V_1}{V_2} = \frac{L}{l}$ et comme $L \neq l$, il en découle que $\boxed{V_1 \neq V_2}$.

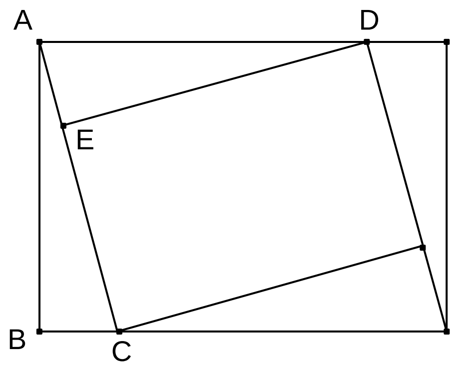
Remarquons qu'<u>il n'est pas nécessaire d'effectuer des calculs pour conclure</u>.

2. Dans une feuille de papier de format A4, on enlève deux triangles de mêmes dimensions selon la figure donnée dans l'énoncé. Selon la façon dont on roule la feuille on obtient deux cylindres de tailles différentes.

Pour le cylindre n°1, on a avec les notations précédentes :

$$a = 29.7 - x = L - x \quad \text{et} \quad b = 21 = l \quad \text{d'où} \quad \boxed{V_1 = \frac{1}{4\pi}(L-x)^2 l}.$$

Pour le cylindre n°2, on doit déjà calculer les valeurs de *a* et *b*.



Or (cf figure) :

$a = AC$ s'obtient en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle ABC.
Il vient $AC^2 = AB^2 + BC^2 = l^2 + x^2$ d'où $a = AC = \sqrt{l^2 + x^2}$.

Pour calculer $b = DE = h$, remarquons que les triangles *ABC* et *DEA* sont semblables.

Il vient : $\frac{DE}{AD} = \frac{AB}{AC}$ soit $\frac{b}{L-x} = \frac{l}{\sqrt{l^2+x^2}}$ d'où $b = \frac{l(L-x)}{\sqrt{l^2+x^2}}$

On a alors :

$$V_1 = \frac{1}{4\pi}\left(\sqrt{l^2+x^2}\right)^2 \frac{l(L-x)}{\sqrt{l^2+x^2}} \quad \text{soit} \quad \boxed{V_2 = \frac{1}{4\pi} l (L-x)\sqrt{l^2+x^2}}.$$

Par suite :

$$V_1 = V_2 \iff \frac{1}{4\pi}(L-x)^2 l = \frac{1}{4\pi} l (L-x)\sqrt{l^2+x^2}$$

$$\iff (L-x) = \sqrt{l^2+x^2} \qquad \text{en simplifiant par } \frac{1}{4\pi}(L-x)l$$

$$\iff (L-x)^2 = l^2 + x^2$$

$$\iff L^2 + x^2 - 2Lx = l^2 + x^2$$

$$\iff L^2 - 2Lx = l^2$$

$$\iff \boxed{x = \frac{L^2 - l^2}{2L}}$$

Numériquement on obtient $L = 29,7$ et $l = 21$: $\boxed{x \simeq 7.426}$.

soit $x \simeq \dfrac{29.7}{4} = 7.425$.

Autrement dit <u>il suffit de choisir pour *x* à peu près le quart de la longueur de la feuille</u>.

Le résultat peut sembler étonnant. Ce $\dfrac{1}{4}$ est-il un hasard ?

Démystifions…

En fait, le format $21 \times 29,7$ a été choisi de manière à ce qu'on puisse réduire deux feuilles de papier A4 en une seule.

Ceci est possible si $\dfrac{2l}{L} = \dfrac{L}{l}$ soit $L = l\sqrt{2}$.

mais 29 n'est qu'une valeur approchée (certes très bonne) de $21\sqrt{2}$.

Si le format A4 était non 21×29.7 mais $21 \times 21\sqrt{2}$ (peut-être l'est-il, il faudrait demander aux papetiers…) , l'exercice donnerait pur résultat :

$$x = \frac{L^2 - l^2}{2L} = \frac{L^2 - \dfrac{L^2}{2}}{2L} = \frac{L^2}{4L} \text{ soit } \boxed{x = \frac{L}{4}} \qquad \text{sic….}$$

2. Exercices réservés aux candidats des séries S et S.T.I.

<u>**Exercice3** (éléments de solution)</u>

1. Tout sommet vert ayant un voisin non vert peut être transformé par l'opération en un sommet rouge ou un sommet bleu. Aucun nouveau sommet vert n'est ainsi créé. On itère jusqu'à épuisement des sommets verts.
2. *a*. Tout bloc tricolore peut être transformé en un bloc monochrome ou en un bloc bicolore. Tout bloc bicolore peut être transformé en un bloc monochrome, comme l'indiquent les protocoles suivants :

Tricolores	RVBV	donne	BBRR		
	RBVV	donne	VVVV		
	RVVB	donne	BBRR		
	VRBV	donne	BBRR		
Bicolores	RRRV	donne	RRBB		
	RRVR	donne	RRBB		
	RRVV	donne	RBBV	qui donne	VVBV
Qui donne	VRRV	qui donne	BBBB		

Toutes les dispositions possibles ont été évoquées.

b. Échange des couleurs de blocs monochromes voisins

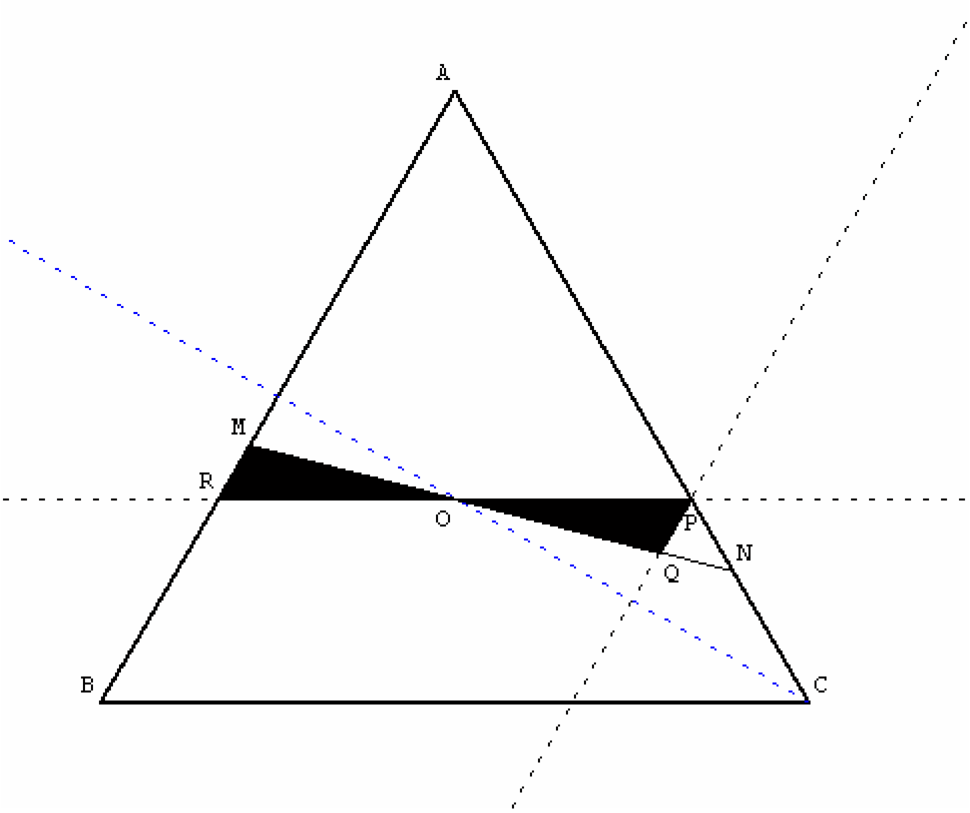
RRRRVVVV donne RRRBBVVV puis RRVVRRVV
Puis RBBVRBBV puis VVBVRBRR puis VVRRVVRR
Puis VVRBBVRR enfin VVVVRRRR

c. Recoloration de blocs voisins

RRRRVVVV	donne	RRRBBVVV	puis	RRVVRRVV	
Puis	RBBVRBBV	puis	VVBVRBRR	puis	VRRVRVVR
Et enfin	BBBBBBBB.				

d. Uniformisation

Exercice 4 (éléments de solution)



Cette figure montre comment mettre en évidence un minimum.

3. Exercices réservés aux candidats des séries L, STG et ES

Exercice 3 (éléments de solution)

On trouve en effet toujours 111.

Le terme figurant dans la première colonne sur la *p*-ième ligne du tableau est $(p-1)n+1$. Sur cette ligne, on choisit un terme, dont la différence avec $(p-1)n+1$ est *k*. Le nombre *k* prend une fois chaque valeur entière comprise entre 0 et $(n-1)$. La somme obtenue est donc :

$S=\{1+(n+1)+...+((n-1)n+1)\}+\{0+1+...+(n-1)\}$, qui ne dépend que de *n* (c'est la moyenne des sommes des termes des lignes).

Exercice 4 (éléments de solution)

1. Cas de deux pions
On a en effet $2+2=2\times 2$.
D'après l'identité remarquable (pas assez remarquée) :

pour tous a et b réels $ab-(a+b)=(a-1)(b-1)-1$

on voit que $ab=a+b$ si et seulement si $(a-1)(b-1)=1$, dont la seule solution en nombres entiers est bien $(2,2)$.

2. L'équation $n^n=n\times n$ s'écrit aussi $n^{n-2}=1$ dès que n est supérieur ou égal à 2, ce qui conduit à $n=2$

3. On joue avec trois pions
On n'envisage donc pas de poser les trois pions sur la même case.
Essayons avec deux pions sur une case et un pion sur une autre case. On doit résoudre en nombres entiers $2a+b=a^2b$, ou encore $2a=b(a^2-1)$. L'identité $a^2-1-2a=(a-1)^2-2$ montre que $a^2-1>2a$ dès que $a\geqslant 3$. Les seuls cas envisageables sont $a=1$ et $a=2$, qui ne conduisent pas à des solutions.
On cherche maintenant des triplets (a,b,c) d'entiers distincts dont a est le plus grand (a est donc supérieur ou égal à 3).
On peut écrire : $abc-a-b-c=c(ab-1)-(a+b)$,
Or l'identité $ab-1-(a+b)=(a-1)(b-1)-2$ montre que $ab-1>a+b$ dès que $a\geqslant 3$ et $b\geqslant 3$. On est réduit à la seule solution $a=3,\ b=2, c=1$.

4. On joue avec 4 pions
On n'envisage pas de les mettre sur la même case. Peut-on envisager d'en mettre trois sur une case et un sur une autre ?
On cherche à résoudre en nombres entiers l'équation $a^3b-3a-b=0$, qui peut aussi s'écrire $b\left(a^3-1\right)-3a=0$. Or, l'identité $a^3-1-3a=a\left(a^2-3\right)-1$ montre que $a^3-1>3a$ dès que $a\geqslant 2$. L'hypothèse $a=1$ ne conduit pas à une solution.
Peut-on envisager de mettre deux pions sur une case et deux sur une autre ?
On cherche à résoudre $a^2b^2-2a-2b=0$.
L'identité $a^2b^2-2a-2b=ab(ab-1)+(a-2)(b-2)-4$ montre que a et b ne peuvent être tous les deux supérieurs à 2. Il reste à essayer $a=1$ et $a=2$, qui ne conduisent pas à des solutions.

Peut-on envisager d'en mettre deux sur une case et les deux autres sur deux cases différentes ?
Appelons a le numéro de la case contenant deux pions, b et c les numéros des deux autres cases. La condition pour gagner s'écrit : $2a+b+c=a^2bc$.
Cherchons des solutions pour lesquelles $a=1$. S'il y en a, elles vérifient : $(b-1)(c-1)-3=0$. Si b est le plus petit des deux numéros, $b=2$ fournit la solution $a=1, b=2, c=4$, et pour b et c supérieurs à 3, $(b-1)(c-1)-3>0$. On n'a trouvé qu'une solution satisfaisant à $a=1$
La nullité de $a^2bc-2a-b-c$ est aussi celle de $a^2b^2c^2-2abc-b^2c-bc^2$, qui s'écrit aussi $(abc-1)^2-b^2c-bc^2-1$. Pour $a\geqslant 2$, on peut écrire :

$\left(abc-1\right)^2-b^2c-bc^2-1\geqslant\left(2bc-1\right)^2-b^2c-bc^2-1$, ou encore :
$\left(abc-1\right)^2-b^2c-bc^2-1\geqslant bc\left[b\left(2c-1\right)+c\left(2b-1\right)-4\right]$.
Le second membre de cette inégalité est strictement positif lorsque $b=1$ et $c\geqslant 2$, et il l'est également lorsque b et c sont supérieurs ou égaux à 2. Il n'y a donc pas d'autre solution.

On cherche donc à placer les quatre pions sur des cases différentes.
Un produit de quatre entiers non nuls distincts est supérieur ou égal à 24. Si une somme de quatre entiers naturels non nuls est égale à 24, elle fait apparaître un terme au moins supérieur à 6. Et $6\times1\times2\times3=36$, donc il n'y a pas de solution.