Académie de Versailles

Olympiades académiques de mathématiques

Concours 2005

***

Mercredi 23 mars 2005

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont autorisées.

***

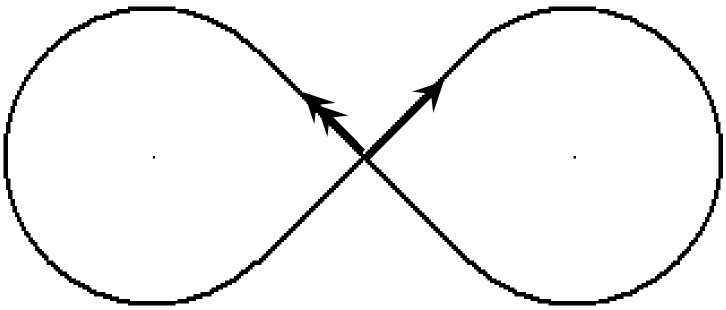
Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à faire figurer sur les copies les résultats, même partiels, auxquels ils sont parvenus, et les idées qui leur sont venues.

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE | INRIA ROCQUENCOURT
partenaire de l'académie de Versailles

Exercice numéro 1

Le lièvre et la tortue

La piste du champiodrome a la forme suivante : deux arcs formant les trois quarts d'un cercle, raccordés par les deux diagonales d'un carré, ces deux diagonales se coupant en un carrefour.



Au même instant, une tortue et un lièvre partent du carrefour, empruntant deux diagonales différentes menant à deux arcs de cercle différents (sur le dessin, une flèche pour la tortue, deux flèches pour le lièvre).
Les deux animaux courent à vitesse constante, et la tortue met 363 secondes pour parcourir la distance parcourue par le lièvre en 1 seconde.

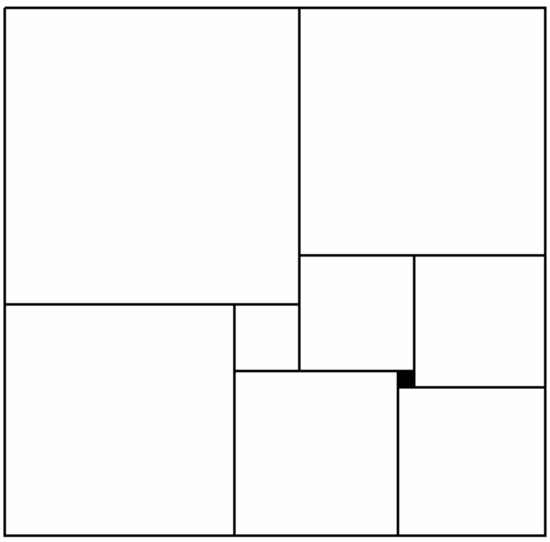
Après 2005 rencontres (dépassements sur la piste ou croisements au carrefour), hormis le départ, le lièvre abandonne.

Combien de fois avait-il croisé la tortue au carrefour ?

Exercice numéro 2

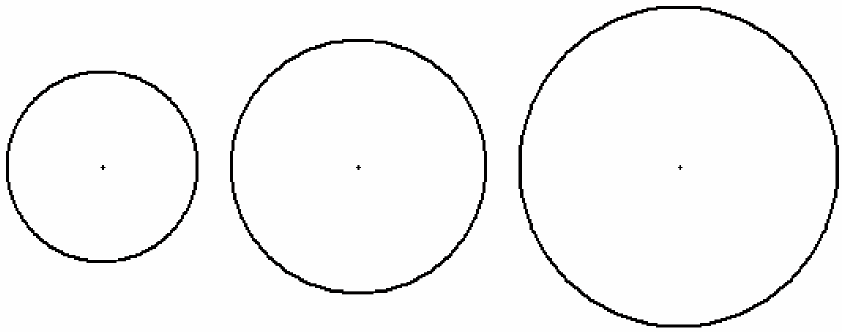
Un pavage

Le rectangle ci-dessous est pavé par 9 carrés. Le carré noir a pour côté une unité.
Quelles sont les dimensions du rectangle ?



Exercice numéro 3 (concours STT, ES, L)

La figure ci-dessous représente trois gâteaux de forme circulaire. Ils ne diffèrent que par leurs diamètres. Le premier a pour diamètre 6 cm, le second 8 cm et le troisième 10 cm.



Quatre enfants désirent se partager équitablement ces gâteaux : les parts de chacun, même si elles sont constituées de plusieurs morceaux, doivent avoir la même aire totale.

Pour chaque gâteau, on ne s'autorise que des coupes rectilignes passant par le centre.

Quel est le nombre minimal de coupes pour cette répartition ?

Exercice numéro 4 (concours STT, ES, L)

Un nombre entier naturel quelconque peut être écrit comme la somme de puissances de 2. On a, par exemple, $6 = 4 + 2$, mais aussi $6 = 2 + 2 + 1 + 1$, ou encore $6 = 2 + 2 + 2$.

Dans cet exercice, on s'intéresse aux décompositions dans lesquelles une même puissance de 2 apparaît au maximum deux fois (par exemple, la dernière décomposition proposée ci-dessus pour 6 ne convient pas). On note $d(n)$ le nombre de telles décompositions du nombre n.

1. Montrer que $d(6) = 3$.

2. Calculer $d(n)$ pour les entiers compris entre 1 et 5.

3. Calculer $d(10)$, $d(11)$, $d(21)$ et $d(22)$.

4. Prouver que $d(2005) = d(1002)$.

5. Calculer $d(2005)$.