Académie de Versailles

Olympiades académiques de mathématiques

Concours 2005

***

Mercredi 23 mars 2005

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont autorisées.

***

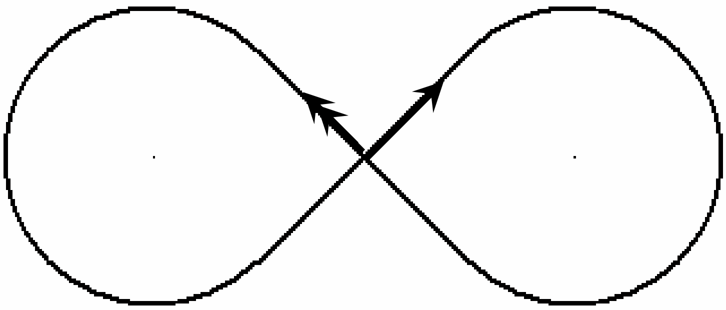
Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à faire figurer sur les copies les résultats, même partiels, auxquels ils sont parvenus, et les idées qui leur sont venues.

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE
INRIA ROCQUENCOURT
partenaire de l'académie de Versailles

Exercice numéro 1

Le lièvre et la tortue

La piste du champiodrome a la forme suivante : deux arcs formant les trois quarts d'un cercle, raccordés par les deux diagonales d'un carré, ces deux diagonales se coupant en un carrefour.



Au même instant, une tortue et un lièvre partent du carrefour, empruntant deux diagonales différentes menant à deux arcs de cercle différents (sur le dessin, une flèche pour la tortue, deux flèches pour le lièvre).
Les deux animaux courent à vitesse constante, et la tortue met 363 secondes pour parcourir la distance parcourue par le lièvre en 1 seconde.

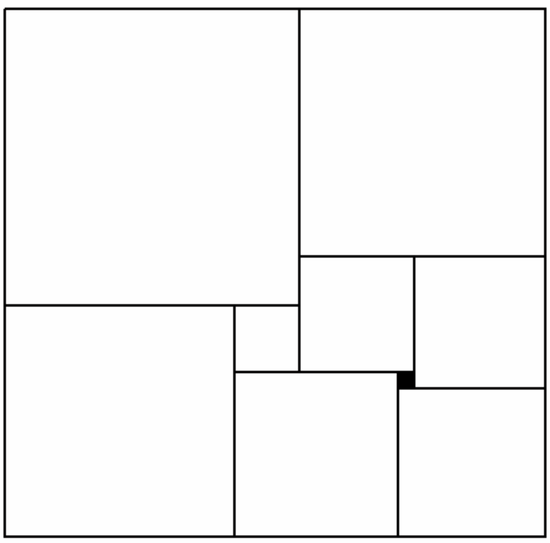
Après 2005 rencontres (dépassements sur la piste ou croisements au carrefour), hormis le départ, le lièvre abandonne.

Combien de fois avait-il croisé la tortue au carrefour ?

Exercice numéro 2

Un pavage

Le rectangle ci-dessous est pavé par 9 carrés. Le carré noir a pour côté une unité.
Quelles sont les dimensions du rectangle ?

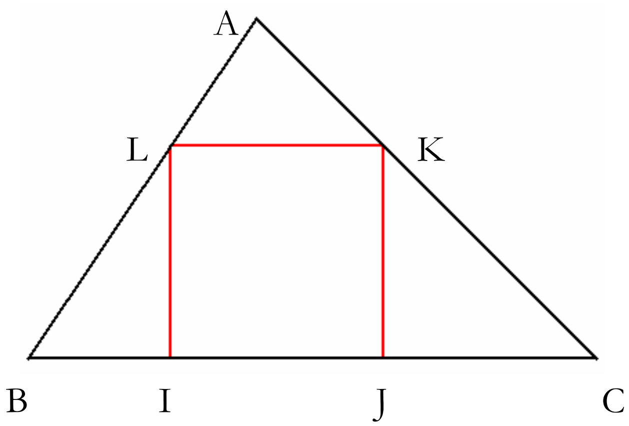


Exercice numéro 3 (concours S, STI)

On considère un triangle ABC dont les trois angles sont aigus. On pose : $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. On appelle h la hauteur relative à $[BC]$ et $\boldsymbol{S}$ l'aire du triangle ABC.

On inscrit dans ce triangle le carré $IJKL$ tel que :
$I \in [BC]$, $J \in [BC]$, $K \in [AC]$ et $L \in [AB]$,
comme sur la figure ci-contre. On dit que le carré $IJKL$ est *posé sur* $[BC]$. On appelle C_1 ce carré.

On peut construire de même deux autres carrés C_2 et C_3 inscrits dans le triangle ABC, l'un posé sur $[CA]$, l'autre posé sur $[AB]$.



1. Exprimer le côté du carré $IJKL$ en fonction de a et h.

2. On suppose que : $a \leqslant b \leqslant c$. Classer les trois carrés C_1, C_2 et C_3 par ordre de grandeur.

3. Déterminer les triangles ABC d'aire $\boldsymbol{S}$ donnée tels que l'aire du carré $IJKL$ soit maximale.

4. Existe-t-il des triangles ABC d'aire $\boldsymbol{S}$ donnée tels que les trois carrés soient d'aires maximales ?

Exercice numéro 4 (concours S, STI)

On dispose de 100 cartes. Sur chacune sont écrits deux entiers consécutifs, de sorte que chacun des entiers 1, 2, 3, …, 199, 200 est écrit sur une et une seule carte.

1. Alice a choisi 21 cartes au hasard. Elle fait la somme de tous les entiers écrits sur ces cartes et annonce à Bob que cette somme est égale à 2004. Prouver qu'Alice s'est trompée dans son calcul.

2. Alice recompte et annonce cette fois 2005. Prouver qu'elle s'est à nouveau trompée dans son calcul.

3. En fait, le total d'Alice est 2003. Pendant ce temps, Bob a choisi 20 cartes au hasard parmi celles qui restaient. Il fait la somme des nombres écrits sur ses cartes et annonce à Alice que cette somme est 1396. Prouver que Bob s'est trompé dans son calcul.