Olympiades académiques de mathématiques 2004

Éléments de solutions

Rappel : le sujet comporte deux exercices choisis par la cellule nationale (les exercices 1 et 2) et deux exercices choisis par la cellule académique (les exercices 3 et 4). Il y aura un palmarès académique. Les meilleures copies de chaque académie seront ensuite soumises au jury national qui établira un palmarès national.

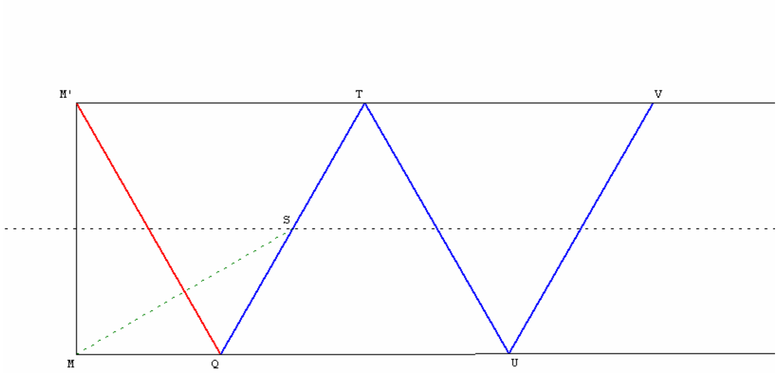
Exercice 1

Une condition nécessaire tirée de $f(u)=v$ et $f(v)=u$ s'exprime ainsi : $v-\sqrt{b+v}=u-\sqrt{b+u}$. Elle donne l'idée que les réels u et v ont la même image par la fonction $f_b : \begin{pmatrix} [-b,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto x-\sqrt{b+x} \end{pmatrix}$.

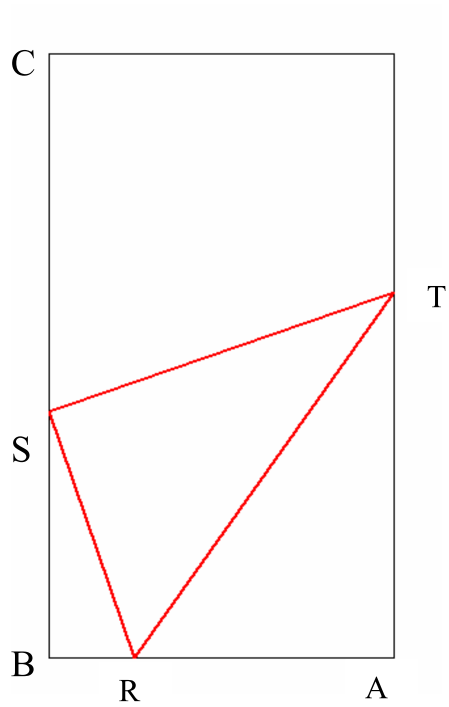
L'étude des fonctions f_b conduit au résultat suivant : f_b est décroissante sur l'intervalle $\left[-b,-b+\frac{1}{4}\right[$, croissante sur $\left[-b+\frac{1}{4},+\infty\right[$. En $-b$ et $-b+1$, elle prend la même valeur, $-b$. Si deux réels ont la même image par f_b, ils sont éléments de $[-b,-b+1]$. Et si deux entiers ont la même image, **ce sont** $-b$ et $-b+1$…

Exercice 2

Cet exercice, que certains professeurs nous ont signalé soumettre régulièrement à leurs élèves, fait penser à la « construction » du tétraèdre régulier (ou, plus simplement, de l'angle de 60 degrés) avec la bande de papier et son axe médian :



Le problème peut être abordé par des considérations de géométrie «pure » ou par des considérations d'aires. Nous proposons une solution « analytique » qui montrera que, si les paramètres sont parfois indésirables, ils sont souvent imparables.



On se place donc dans le repère orthonormal d'origine B dont les axes sont portés par (AB) et (BC), et on prend m pour ordonnée de S. La médiatrice de [AS] a pour équation :

$$8X - 2mY + m^2 - 16 = 0 .$$

Les coordonnées des points d'intersection R et T de cette droite avec les côtés du rectangle s'en déduisent, et on a $x = \dfrac{m^2+16}{8}$ et $y = \dfrac{m^2+16}{2m}$, fournissant la condition : $6 - 2\sqrt{5} \leqslant m \leqslant 4$, la relation $4x = my$, et se traduisant par l'encadrement : $9 - 3\sqrt{5} \leqslant x \leqslant 4$. L'aire considérée est minimale lorsque xy l'est, ce qui donne $m = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$, $x = \dfrac{8}{3}$, $y = \dfrac{8}{\sqrt{3}}$.

Le triangle isocèle ATS a un demi-angle au sommet de mesure 30 degrés. Il est équilatéral.

Exercice 3

On sait écrire sous la forme d'un produit la somme des entiers compris entre 1 et n : $1+2+3+...+n = \dfrac{(n+1)n}{2}$. La question revient donc à ôter quelques entiers inférieurs ou égaux à n à chaque membre de cette égalité, de façon que le second puisse être écrit comme un produit de facteurs inférieurs ou égaux à n, différents et ne figurant pas dans le (nouveau) premier membre. On sera pour cela amené à distinguer les cas n pair et n impair, pour éliminer la (fâcheuse) division par 2 qui figure dans l'égalité de départ.

Si on note S_n la somme des entiers naturels inférieurs ou égaux à n, on trouve (en tâtonnant…)

$S_{2p+1} - 2p - p - 1 = (2p).p.1$ (qui exige $p>1$ donc n>3) et

$S_{2p} - (p-1) - 2p - 1 = 2p.(p-1).1$ (qui exige $p-1>1$, donc n>4).

Exercice 4

2. Dans un tournoi opposant n équipes, chaque équipe joue n–1 matches, et le nombre total de matches joués est $\dfrac{n(n-1)}{2}$. Une équipe ne peut donc compter autant de victoires que de défaites que si l'effectif est impair. C'est possible pour tout effectif impair distinct de 1, il suffit que chacune des $2p+1$ équipes gagne contre les p suivantes dans la liste (1, 2, 3, …, p, …, $2p$, $2p+1$,1, 2, 3, …, p).

3. Supposons que le vainqueur ait gagné tous ses matches, et limitons l'effectif à ses adversaires vaincus. Le second peut alors compter, vis-à-vis de ses successeurs, autant de victoires que de défaites, et donc au total une victoire de moins que le nombre de ses défaites, conformément à la question précédente, si l'effectif amputé du premier est impair, donc si l'effectif total est pair (et ça commence à 2…)
Si l'effectif total est le nombre impair $2n+1$, le second a gagné au plus $n-1$ matches, il en est de même de ses successeurs. Nous connaissons donc les vainqueurs de $2n(n-1)$ matches, et comme le premier en a gagné au plus $2n$, le nombre total de victoires est au plus $2n^2$. C'est trop peu pour un tournoi qui comporte $2n^2+n$ matches…

4. Oublions la condition « les trois premiers » et demandons que le classement s'établisse intégralement en fonction du seul nombre de victoires : des nombres de victoires, tous différents et inférieurs à $n-1$, dont la somme est $\frac{n(n-1)}{2}$, il n'y a pas tellement le choix : si chaque équipe a battu toutes celles qui la suivent au classement, nous y sommes. Ce modèle idéal peut naturellement supporter quelques permutations. La chose est donc possible pour tout effectif supérieur ou égal à 3.

5. Les nombres de victoires des trois premiers sont au plus $n-2$, $n-3$ et $n-4$. n est donc supérieur ou égal à 4. Il y a donc au moins une quatrième équipe. Son nombre de victoires est au plus $n-5$. Il y a donc au moins une cinquième équipe. Il n'est pas possible que les deux dernières équipes n'aient aucune victoire : elles ont joué l'une contre l'autre. $n-5$ est donc non nul, et il y a une sixième équipe. À six équipes, le nombre de victoires est au plus $4+3+2+1+1+1=12$ victoires pour 15 matches… À sept équipes, il est $5+4+3+2+2+2+2 =18$ pour 21 matches. Il ne reste plus qu'à construire un tableau possible pour 8 équipes, nombre minimal cherché. Pour obtenir le même résultat avec un effectif plus élevé, ajouter une équipe qui gagne la cuiller de bois et donner une victoire supplémentaire aux autres.