ACADÉMIE DE VERSAILLES

OLYMPIADES ACADÉMIQUES
DE MATHÉMATIQUES

Compétition ouverte aux élèves des classes de première

Mercredi 26 mars 2003

*

Durée : 4 heures

Les quatre exercices sont indépendants.
Les calculatrices sont autorisées.

EXERCICE numéro 1

On se propose de déterminer toutes les configurations de quatre points distincts *A, B, C, D* du plan tels que leurs distances mutuelles *AB, AC, AD, BC, BD, CD* ne prennent que deux valeurs exactement que l'on notera x et y. C'est, par exemple, le cas lorsque *ABCD* est un carré, x est la longueur des côtés et y celle des diagonales.

1. Étude du cas « 1,5 » où l'une des distances est égale à x et les cinq autres à y.

Montrer qu'il existe, à l'ordre près des points, une seule configuration répondant à la question. Dessiner cette configuration.

2. Étude du cas « 2,4 » où deux distances sont égales à x et les quatre autres à y.

a. On suppose que les deux segments de longueur x n'ont pas de sommet commun. Quelle configuration obtient –on ? La dessiner.
b. Que se passe – t – il lorsque les deux segments de longueur x ont un sommet en commun ?

3. Étudier le cas « 3,3 ».

EXERCICE numéro 2

Dans tout ce qui suit, les polygones considérés sont convexes ; pour chaque sommet S d'un polygone, on notera $\hat{S}$ l'angle intérieur $\widehat{RST}$, où R et T sont les sommets voisins de S.

1. Soit ABCD un quadrilatère tel que :

- La diagonale [AC] divise chacun des angles $\hat{A}$ et $\hat{C}$ en deux angles égaux,
- La diagonale [BD] divise chacun des angles $\hat{B}$ et $\hat{D}$ en deux angles égaux.

a. Prouver que ABCD est un losange.

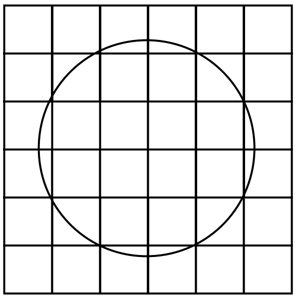
b. Le losange ABCD est – il nécessairement un carré ?

2. Soit maintenant un pentagone ABCDE tel que les deux diagonales issues du sommet A (respectivement B, C, D et E) divise l'angle $\hat{A}$ (respectivement $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$ et $\hat{E}$) en trois angles égaux.
Prouver que ABCDE est un pentagone régulier.

3. Soit enfin $A_1A_2\ldots A_{2003}$ un polygone à 2003 sommets tel que pour chaque sommet A_i, les 2000 diagonales issues de A_i divisent l'angle $\hat{A}_i$ en 2001 angles égaux.
Prouver que le polygone $A_1A_2\ldots A_{2003}$ est un polygone régulier.

EXERCICE numéro 3

René dispose dans son jardin d'une très grande terrasse carrelée avec de très belles dalles carrées de 0,5 m de côté.
Il décide de construire sur cette terrasse une table ronde avec des pieds sur le bord et un parasol central.
René est un bricoleur prévoyant, aussi, pour gagner en stabilité, il décide que la table devra avoir le maximum de pieds, tous solidement fixés au sol. Tout comme le parasol car on n'est jamais à l'abri d'un coup de vent…
Mais René est aussi un bricoleur soigneux ; alors, pour ne pas détériorer les dalles, il choisit de percer la terrasse uniquement aux intersections des joints de séparation.
La figure ci – dessous donne un exemple de table à 8 pieds.



Si n désigne le nombre de pieds de la table et d son diamètre exprimé en mètres, on définit le *coefficient de solidité* s de la table par la formule $s = \frac{n}{d}$. Une table est donc d'autant plus solide que son coefficient de solidité est élevé.

1. Calculer le coefficient de solidité de la table dessinée ci – dessus.
2. Quelles sont les deux tables les plus petites ? Préciser leur coefficient de solidité.
3. Quel est le coefficient de solidité maximal d'une table à 12 pieds ?
4. Quelle est la table la plus solide ?
5. René peut – il fabriquer une table à 16 pieds dont le diamètre exprimé en mètres est un nombre entier ?

EXERCICE numéro 4

Les pages d'un livre sont numérotées de 1 à n (on rappelle que la page numérotée 1 est toujours une page de droite). On additionne les numéros de toutes les pages et on trouve un total égal à 2 003. Mais deux pages numérotées sont restées collées et leurs numéros n'ont pas été compris.

Quels sont le nombre de pages du livre et les numéros des pages collées ?