mardi 15 juillet 2025

Problème 1. On dit qu'une droite du plan est *ensoleillée* lorsqu'elle n'est parallèle ni à l'axe des abscisses, ni à l'axe des ordonnées, ni à la droite d'équation $x + y = 0$.

Soit $n \geqslant 3$ un entier donné. Trouver tous les entiers $k \geqslant 0$ pour lesquels il existe n droites du plan, deux à deux distinctes, telles que

— pour tous les entiers $a \geqslant 1$ et $b \geqslant 1$ tels que $a + b \leqslant n + 1$, le point de coordonnées (a, b) appartient à au moins une de ces n droites, et

— exactement k de ces n droites sont ensoleillées.

Problème 2. Soit Ω un cercle de centre M et Γ un cercle de centre N tels que le rayon de Ω soit strictement plus petit que le rayon de Γ. On suppose que les cercles Ω et Γ se coupent en deux points A et B distincts. La droite (MN) coupe Ω en un point C et Γ en un point D de sorte que les points C, M, N et D soient alignés dans cet ordre. Soit P le centre du cercle circonscrit au triangle ACD. La droite (AP) recoupe Ω en un point E distinct de A ; elle recoupe également Γ en un point F distinct de A. Enfin, soit H l'orthocentre du triangle PMN.

Démontrer que la parallèle à (AP) passant par H est tangente au cercle circonscrit au triangle BEF.

(L'*orthocentre* d'un triangle est le point d'intersection de ses hauteurs.)

Problème 3. Soit $\mathbb{N}_{\geqslant 1}$ l'ensemble des entiers strictement positifs. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{N}_{\geqslant 1} \to \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ est *balaise* si

$$f(a) \;\text{ divise }\; b^a - f(b)^{f(a)}$$

pour tous les entiers $a \geqslant 1$ et $b \geqslant 1$.

Trouver le plus petit nombre réel c tel que $f(n) \leqslant cn$ pour toute fonction f balaise et tout entier $n \geqslant 1$.

mercredi 16 juillet 2025

Problème 4. Un *diviseur strict* d'un entier $m \geqslant 1$ est un diviseur de m strictement positif et différent de m.

La suite $a_1, a_2, \ldots$ consiste en une infinité d'entiers strictement positifs dont chacun possède au moins trois diviseurs stricts. Pour tout $n \geqslant 1$, l'entier a_{n+1} est la somme des trois plus grands diviseurs stricts de a_n.

Trouver toutes les valeurs possibles de a_1.

Problème 5. Anna et Baptiste jouent au jeu de l'iné*koala*té, un jeu à deux joueurs dont les règles dépendent d'un réel $\lambda > 0$ connu des deux joueurs. Pour tout $n \geqslant 1$, lors du $n^{\text{ème}}$ tour de jeu,

— si n est impair, Anna choisit un réel $x_n \geqslant 0$ tel que

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n \; ;$$

— si n est pair, Baptiste choisit un réel $x_n \geqslant 0$ tel que

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n.$$

Si un joueur ne peut pas choisir de réel x_n adéquat, la partie s'arrête ; il perd et son adversaire gagne. Si la partie ne s'arrête jamais, aucun joueur ne gagne. À tout moment, chaque joueur connaît la liste de tous les réels déjà choisis.

Trouver toutes les valeurs de λ pour lesquelles Anna dispose d'une stratégie gagnante, ainsi que toutes celles pour lesquelles Baptiste dispose d'une stratégie gagnante.

Problème 6. Clara a dessiné un quadrillage formé de 2025×2025 carrés unité. Elle souhaite placer sur ce quadrillage des tuiles rectangulaires, de tailles possiblement différentes, de sorte que les côtés de chaque tuile appartiennent à des droites du quadrillage et que chaque carré unité soit recouvert par au plus une tuile.

Trouver le nombre minimal de tuiles que Clara doit placer pour faire en sorte que chaque ligne et chaque colonne du quadrillage contiennent exactement un carré unité qui n'est recouvert par aucune tuile.

Durée : 4 heures et 30 minutes.
Chaque problème est noté sur 7 points.