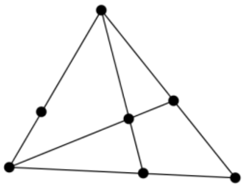
Olympiades de mathématiques 2014

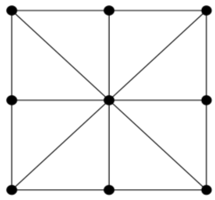
EUROPE – AFRIQUE – ASIE

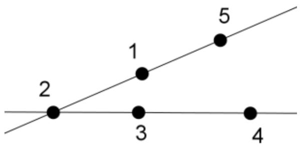
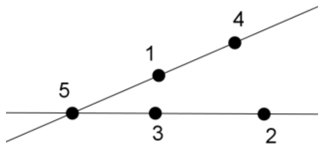
EXERCICE 1 : FIGURES EQUILIBRÉES

Éléments de correction

1. Voici un graphe équilibré ayant 7 points et 5 segments, puis un graphe équilibré ayant 9 points et 8 segments.





<table>
<tr>
<td>2. Exemple de numérotation non magique :

</td>
<td>Exemple de numérotation magique de constante 10 :

</td>
</tr>
</table>

On peut montrer que, pour être magique, une numérotation doit avoir au point d'intersection le numéro 1, 3 ou 5 (en raisonnant sur les numéros restants, par couples sur la même droite).

3.

a) Les quatre segments portent respectivement les sommes $a + c + e$, $a + b + f$, $b + d + e$, $c + d + f$. La somme de ces quatre sommes est d'une part égale à $4K$, et d'autre part : $2(a+b+c+d+e+f)=2\times(1+2+3+4+5+6)=42$. D'où l'égalité $4K=42$.

b) L'égalité est impossible puisque K est un entier. Donc un tel graphe n'est pas magique.

4.

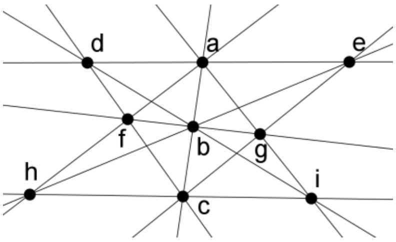
a) La somme $a + c + e$ est minimale lorsque $\{a, c, e\} = \{1, 2, 3\}$, et cette somme est maximale lorsque $\{a, c, e\} = \{4, 5, 6\}$. D'où $6 \le a+c+e \le 15$.

b) Si le graphe est magique, de constante K, on obtient :
$a + b + c = K$; $c + d + e = K$; $a + f + e = K$, d'où, en sommant membre à membre,
$(a + b + c + d + e + f) + (a + c + e) = 3K$.
Comme $a + b + c + d + e + f = 21$, on en déduite que $(a + c + e) = 3(K – 7)$.

c) On déduit de a) et b) que $6 \le 3(K-7) \le 15$, d'où $9 \le K \le 12$.
On vérifie que les quatre valeurs possibles de K donnent effectivement un graphe équilibré magique :

- avec $K=9$, on place en tournant depuis un sommet les nombres 1, 5, 3, 4, 2, 6 ;
- avec $K=10$, on place en tournant depuis un sommet les nombres 5, 4, 1, 6, 3, 2 ;
- avec $K=11$, on place en tournant depuis un sommet les nombres 6, 2, 4, 3, 5, 1 ;
- avec $K=12$, on place en tournant depuis un sommet les nombres 6, 3, 2, 5, 4, 1.

5. On numérote la figure ainsi :



Ces trois sommets a, b, c sont les seuls qui appartiennent à quatre segments, les autres appartenant à trois segments.

On a donc (en additionnant les 10 sommes égales à K) : $4(a+b+c)+3(d+e+f+g+h+i)=10K$.

On a donc $10K = 3 \times 45 + a + b + c = 135 + a + b + c$

Comme $1 + 2 + 3 \leq a + b + c \leq 7 + 8 + 9$, cad $6 \leq a + b + c \leq 24$, on trouve que la seule possibilité pour K est $K = 15$ (et $a + b + c = 15$).

Selon les cas, le sommet qui porte la valeur 9 appartient à trois ou quatre segments.

Puisque la constante est 15, les deux autres nombres portés sur ces trois ou quatre segments ont pour somme 6. C'est impossible car il n'y a ni trois ni quatre façons d'obtenir une somme égale à 6, mais deux façons seulement : 6 = 1 + 5 = 2 + 4..

Conclusion : le graphe donné n'est pas magique.