



RÉGION ACADÉMIQUE
ÎLE-DE-FRANCE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION NATIONALE,
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE



Olympiades académiques de mathématiques par équipe

Mardi 28 mars 2017

Durée de l'épreuve : 2 heures.
Les calculatrices sont autorisées.

Chaque équipe remet ses propositions pour les trois exercices proposés.
Un travail n'est collaboratif que lorsque les recherches et les démarches sont communes, partagées et mutualisées et lorsque les résultats sont collectivement contrôlés.

On peut remettre un travail inachevé, en indiquant en quoi il marque une étape dans la résolution du problème abordé.



Partenaire de l'académie de Versailles



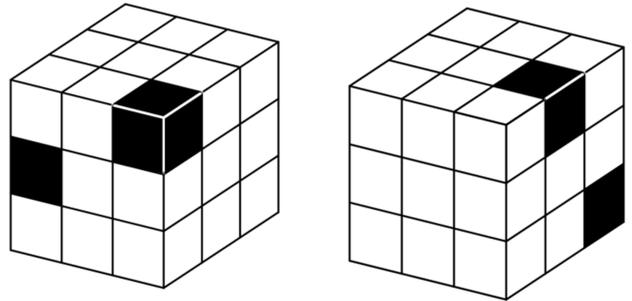
Partenaire des Olympiades académiques
de mathématiques

Exercice 1

Un air de famille

Dans cet exercice les cubes sont représentés en perspective à trois faces ayant un sommet commun.

Avec 27 petits cubes d'arête 1, 25 dont toutes les faces sont blanches et 2 dont toutes les faces sont noires, on construit un cube d'arête 3. La figure ci-contre montre deux cubes ainsi réalisés, qui ne diffèrent que par leur position dans l'espace. On dira qu'ils sont semblables.



On cherche à savoir combien de cubes différents (c'est-à-dire tels qu'aucun d'entre eux n'est semblable à un autre) peuvent être réalisés.

1. Combien y a-t-il de cubes différents dont un cube noir occupe la place centrale (aucune de ses faces n'apparaît sur une face du grand cube) ?
Cette situation est exclue pour la question suivante.
2. Combien y a-t-il de cubes différents pour lesquels la représentation perspective ne montre au total – quel que soit le point de vue utilisé – qu'une face noire de petit cube ?
3. On examine à présent le cas où au moins une face de chaque cube noir est visible sur la représentation perspective. Combien y a-t-il de cubes différents de cette sorte ?
4. Conclure quant au nombre de cubes *différents* qu'on peut réaliser.

Une copie spéciale est remise aux équipes, qui ainsi n'ont pas à faire tous les schémas. Elle propose bien entendu plus de cases qu'il y a de solutions. Ces schémas doivent être accompagnés d'un travail rédigé.

Exercice 2

Diversité dans l'unité

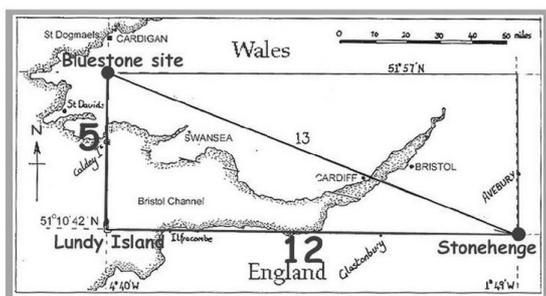
On rappelle que les termes *multiple* et *diviseur* font référence à des nombres entiers.

Le nombre 5 040 possède 60 diviseurs (y compris bien entendu 1 et 5 040 lui-même).

1. Faire la liste des diviseurs de 5 040.
2. Pour chaque chiffre, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9, trouver un diviseur de 5 040 dont ce chiffre soit le chiffre des unités.
3. Quel est le plus petit entier non nul qui admet des diviseurs faisant apparaître comme chiffres des unités tous les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 ?

Exercice 3

Le deuxième triplet pythagoricien



Une unité de longueur étant fixée dans le plan, tout triangle dont les côtés mesurent 5, 12 et 13 est un triangle rectangle.

1. Pourquoi ?
2. Quel est le rayon du cercle inscrit dans le triangle rectangle de côtés 5, 12 et 13 ?

2. Dans le triangle ABC, rectangle en B et tel que $BA = 5$ et $BC = 12$, on considère trois dispositions possibles de deux cercles de même rayon tangents chacun à deux côtés du triangle et tangents entre eux. Ces dispositions sont représentées ci-dessous :
Quels sont les rayons de ces cercles, dans les trois cas représentés ?

