MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION NATIONALE,
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

Olympiades académiques de mathématiques par équipe

Mardi 29 mars 2016

Durée de l'épreuve : 2 heures.
Les calculatrices sont autorisées. De la colle et des ciseaux peuvent être utiles.
Du papier pointé à maille carrée est mis à disposition.

Chaque équipe remet ses propositions pour les trois exercices proposés.
On peut proposer des résultats partiels ou des brouillons.

Exercice 1
Un air de famille

Un nombre N s'écrit dans le système décimal avec les quatre chiffres a, b, c et d, dans l'ordre, le chiffre a des milliers n'étant pas nul.
On peut donc écrire $N = a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10 + d$.

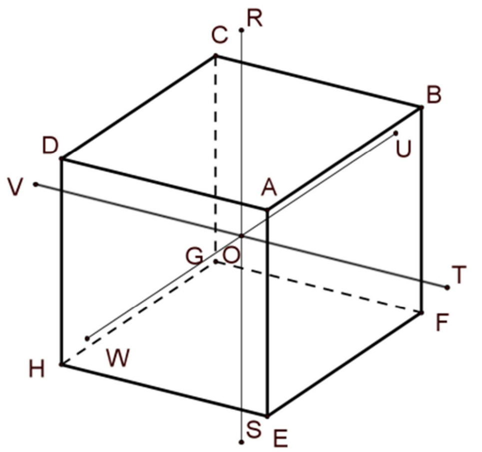
L'écriture décimale du carré de N se termine par les chiffres a, b, c et d, écrits dans le même ordre : il existe un nombre entier M tel que $N^2 = M \times 10^4 + N$.

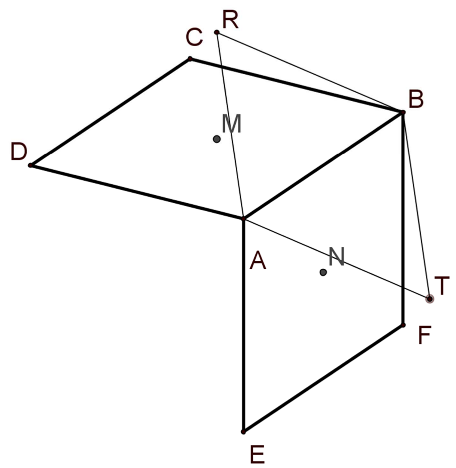
Trouver N.

Exercice 2
Puzzle 3D

1. Assemblage

Sur chaque face d'un cube ABCDEFGH d'arête 2 on pose une pyramide régulière de hauteur 1, dont cette face est la base. On obtient ainsi un solide à 14 sommets. Les figures ci-dessous font apparaître, pour la première, le centre O du cube et les sommets R, S, T, U, V et W des six pyramides, pour la seconde les faces AEFB et ABCD du cube, leurs centres N et M et les sommets T et R des pyramides dont elles sont les bases.





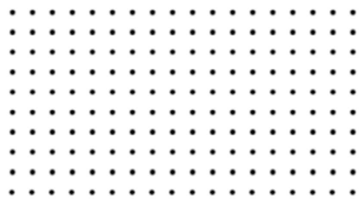
On nomme Σ ce solide
a. Combien a-t-il de faces ?
b. Quelles sont les dimensions de ces faces (longueur des côtés, mesure des angles) ?

2. Découpage

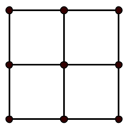
Prouver que Σ est la réunion de quatre solides identiques possédant chacun trois des faces de Σ. Construire un patron d'un de ces solides.

Exercice 3
Chasse aux carrés

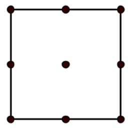
Un *quadrillage à points à maille carrée* est formé de points d'intersection de droites verticales ou horizontales, comme sur la figure ci-contre, la distance entre deux parallèles voisines étant prise pour unité.



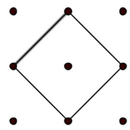
Dans un quadrillage de dimension 3×3, on trouve quatre carrés de côté 1, un carré de côté 2 et un carré de côté $\sqrt{2}$:



Quatre carrés de côté 1



Un carré de côté 2



Un carré de côté $\sqrt{2}$

1. Quels sont les côtés des carrés contenus dans un quadrillage de dimension 4×4 ? Combien y en a-t-il ?

2. Soit n un entier strictement supérieur à 3. Combien de carrés de côté 2 sont-ils contenus dans un quadrillage de dimension $n \times n$? Combien de carrés de côté 3 ? Combien de carrés de côté $\sqrt{5}$?

3. Juliette affirme : « Dans un quadrillage à points de dimension 9×9, le nombre de carrés de côté $\sqrt{29}$ est le double du nombre de carrés de côté 7 ». Selon Roméo, il y en a autant de chaque sorte. Un des deux a-t-il raison ?

4. Déterminer le nombre de carrés contenus dans un quadrillage à points de dimension 9×9.

N.B. Des feuilles de papier pointé à maille carrée sont fournies aux équipes. On peut coller sur la copie les schémas réalisés.