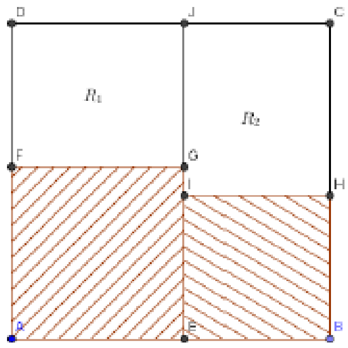
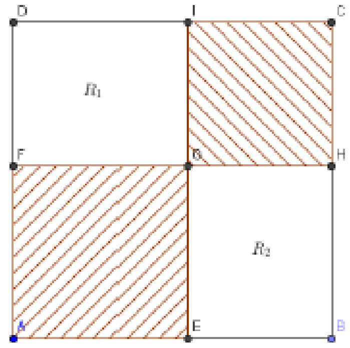
Olympiades par équipe Avril 2014
Troisièmes Secondes
Pistes de réflexion

Exercice 1 Le puzzle

La taille du puzzle

La somme des carrés des longueurs des côtés des carrés est :
$2^2+3^2+4^2+6^2+7^2+8^2+12^2+13^2+14^2+15^2+16^2+17^2+18^2+21^2+22^2+23^2+24^2+26^2+27^2+28^2+50^2+60^2$
$= 121000 = 110^2$
Si on peut reconstituer un carré, son côté est 110.
Plusieurs possibilités (à une symétrie axiale ou une rotation près) : Les carrés ABCD ci dessous sont des carrés de côté 110, les carrés hachurés sont des carrés de côté 50 et 60.





On a alors : $\mathcal{A}(R_1) = \mathcal{A}(R_2) = 3000$, leurs dimensions sont 50 et 60. Il s'agit alors de regrouper les autres carrés pour former R_1 et R_2.

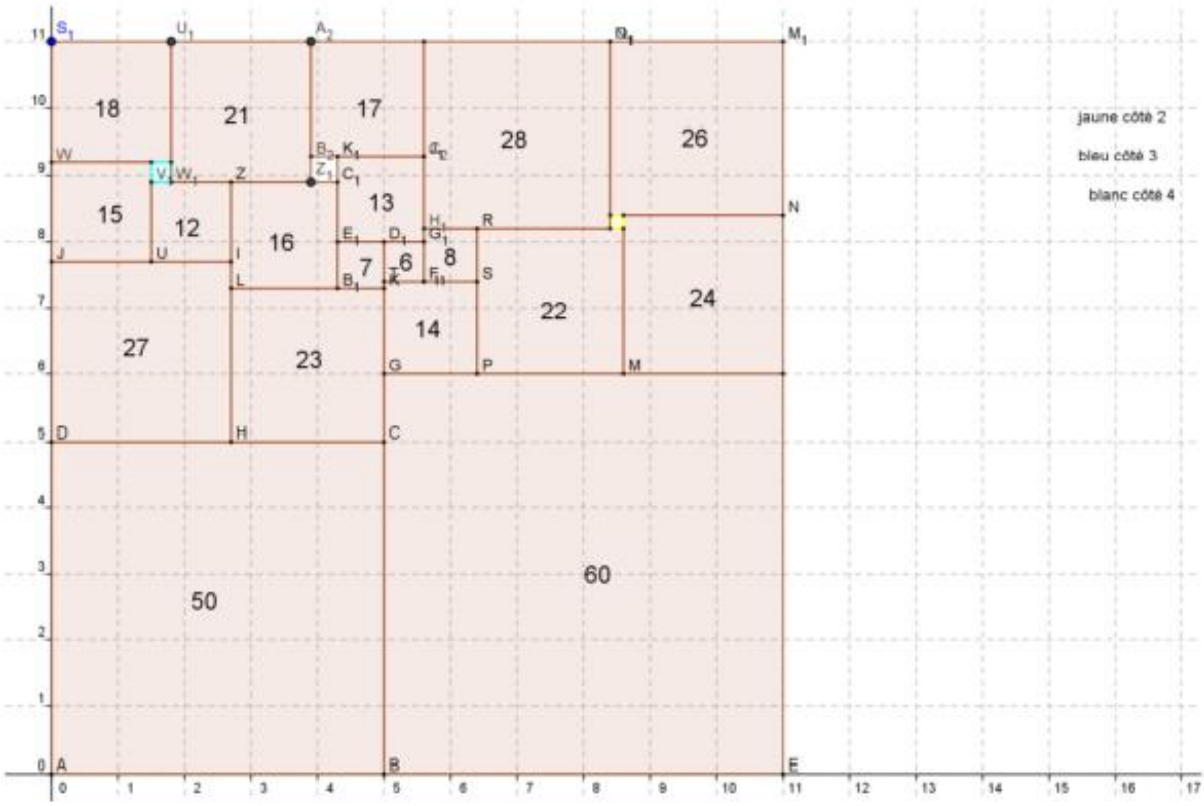
Une première stratégie

Voir fichier tableur en pièce jointe exercice 1
On a, par exemple, :
$28^2 + 27^2 + 26^2 + 23^2 + 13^2 + 8^2 + 7^2 = 3000$
$28^2 + 27^2 + 26^2 + 23^2 + 12^2 + 8^2 + 7^2 + 4^2 + 3^2 = 3000$
Ceci permet de faire un premier tri pour reconstituer un des deux rectangles (l'autre étant constitué des autres pièces)

Une deuxième stratégie

Les dimensions des deux rectangles R_1 et R_2 sont 50 et 60.
Il s'agit de faire des regroupements pour faire des longueurs 50 ou 60.

Un puzzle complété



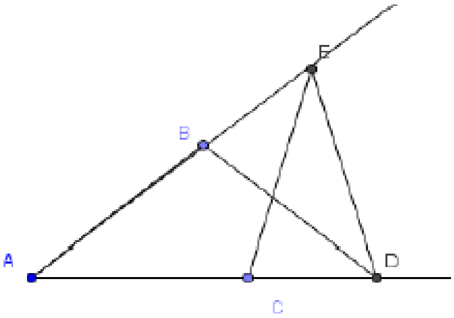
Exercice 2 Nombre saucisson

On compte la position des chiffres à partir de la gauche
Le nombre formé des dix chiffres est un multiple de 10 donc le dernier chiffre est un 0.
Le nombre formé avec les cinq premiers chiffres est un multiple de 5 donc le cinquième chiffre est un cinq (chaque chiffre n'apparait qu'une fois)
Les nombres formés avec les deux, quatre, six et huit premiers chiffres sont des multiples respectif de deux, quatre, six et huit : donc les chiffres pairs occupent les positions paires
La somme des neuf premiers chiffres du nombres est 45, le nombre formé par les chiffres de 1 à 9 est donc un multiple de 9.
Voir le fichier tableur pour les tests
Les nombres à trois chiffres multiples de trois et dont le premier et le dernier chiffre sont impairs et différents (et différents de 5) et dont le deuxième chiffre est pair (non nul) sont :
123 129 147 183 189 321 327 369 381 387 723 729 741
783 789 921 927 963 981 987
A l'aide de ces nombres nous allons nous allons ajouter un quatrième chiffre, pair et différent du chiffre pair déjà utilisé en deuxième position, puis tester si le nombre obtenu est un multiple de quatre, voici les 30 nombres obtenus :
1236 1296 1472 1476 1832 1836 1892 1896 3216 3276 3692
3812 3816 3876 7236 7296 7412 7416 7832 7836 7892 7896
9216 9276 9632 9812 9816 9872 9876
Nous procédons de même pour les multiples de 6, de 7 et de 8.
Le neuvième chiffre est le dernier chiffre non nul qui n'est pas encore utilisé.
Le nombre saucisson obtenu est :

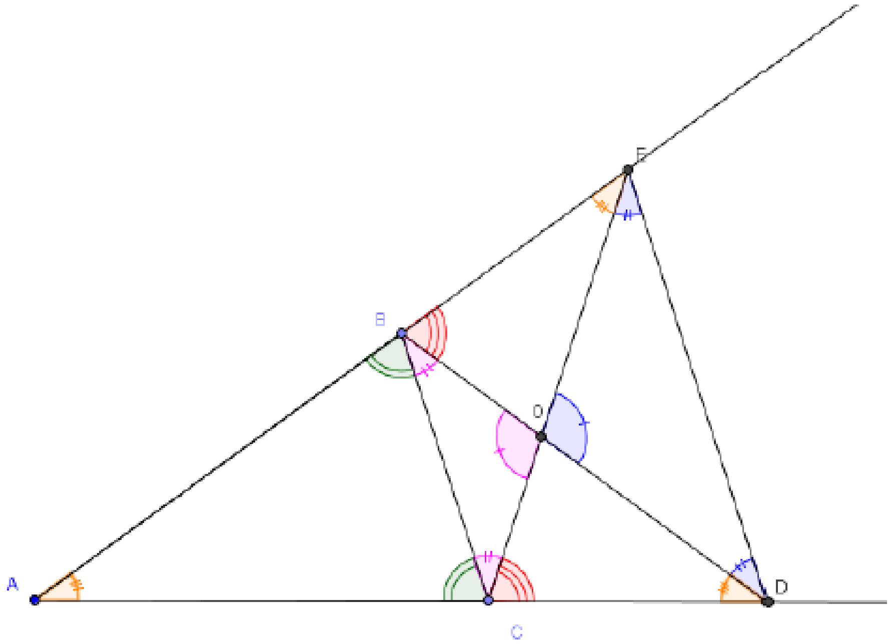
3 816 547 290

Exercice 3 Angles en allumettes

Première figure : l'angle $\widehat{BAC}$



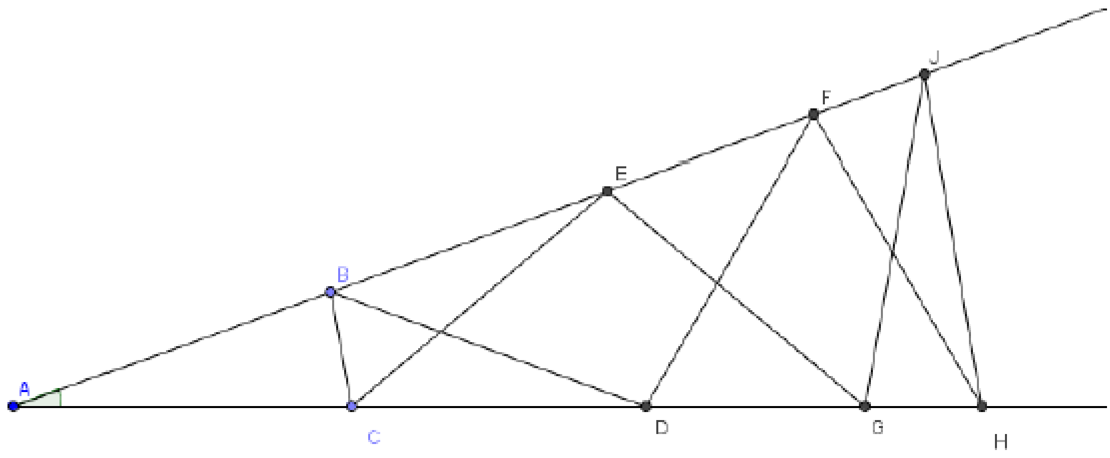
La somme des angles d'un triangle est égale à 180° et un triangle isocèle possède deux angles de même mesure



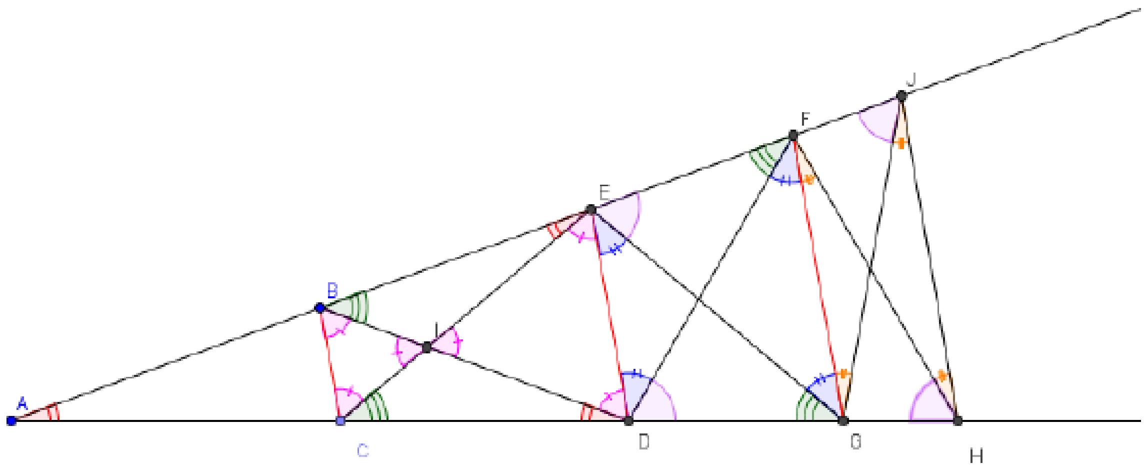
Ce qui permet d'écrire les équations suivantes avec $\widehat{BAC} = x$:
Triangle ABC $x + 2 \times \widehat{ABC} = 180°$
c'est à dire $\widehat{ABC} = 90 - \dfrac{x}{2}$
Triangle AED $x + 2 \times \widehat{AED} = 180°$
Donc $\widehat{ABC} = \widehat{AED}$ (et les droites (BC) et (ED) sont parallèles)
donc $\widehat{BCE} = \widehat{CED}$
Triangle ACE
$x = \widehat{AEC}$
$2 \times x + \widehat{ACE} = 180°$
ainsi $\widehat{BCE} = \widehat{CED} = \widehat{AED} - x = 90 - \dfrac{x}{2} - x = 90 - \dfrac{3}{2}x$
Triangle OCD
$\widehat{COD} + x + \widehat{OCD} = 180°$
or $\widehat{COD} = 180 - \widehat{BOC} = 180 - \widehat{EOD} = 2 \times \widehat{CED} = 180 - 3x$
donc $\widehat{OCD} = 180 - 3x$

Les points A,C et D sont alignés
donc
$\widehat{ACB} + \widehat{BCO} + \widehat{OCD} = 180$
c'est à dire
$90 - \dfrac{x}{2} + 90 - \dfrac{3}{2}x + 180 - 3x = 180$
c'est à dire $5x = 180$
c'est à dire $x = 36^\circ$

Deuxième figure : l'angle $\widehat{BAC}$



En utilisant le codage ci dessous et la méthode utilisée à la question 1, on montre que $\widehat{BAC} = 20^\circ$



Sept allumettes ?

Dans la question précédente, on montre que
$\widehat{JEG} = \widehat{EJG} = \widehat{FDH} = \widehat{FHD} = 60^\circ$
Donc les triangle EJG et FDH sont équilatéraux donc on peut remplacer les quatre allumettes placées en [EG],[GJ],[DF] et [DH] par deux allumettes sur le côtés des angles en [EJ] et [DH] , le nombre total d'allumettes est alors de 7 et l'angle $\widehat{BAC}$ est inchangé.

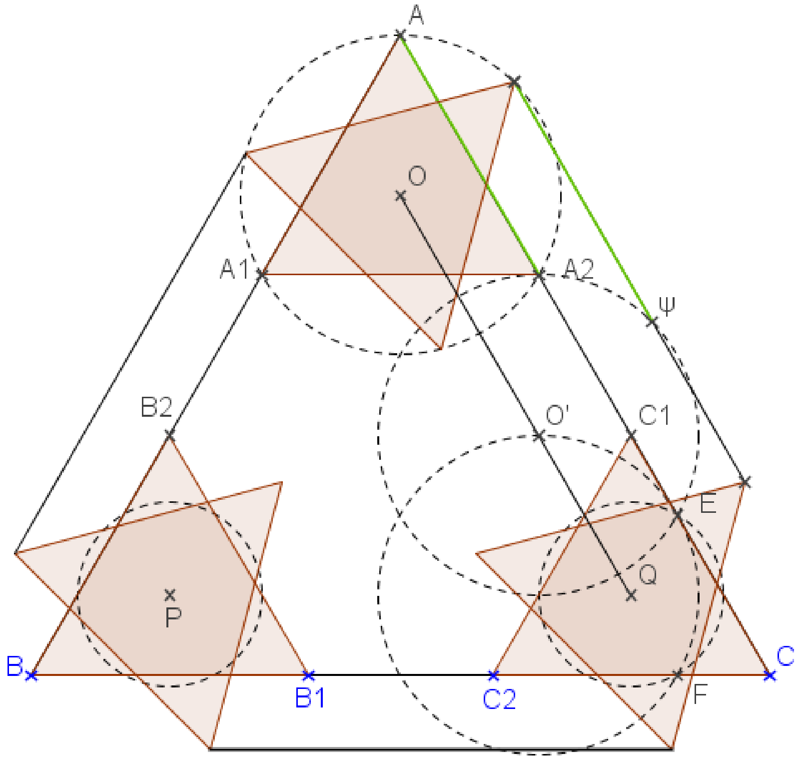
Exercice 4 L'automate

<u>1$^{\text{ère}}$ étape</u> : Le point Ψ tourne autour de O d'un angle compris entre 0 et 120°. Il décrit un arc de cercle représentant un tiers du cercle circonscrit au triangle AA_1A_2.

Le rayon de ce cercle est $\underline{R = \frac{2}{3} \times \frac{18\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}}$.

À l'issue de cette étape, le point Ψ se trouve en A_2.
Il est donc situé sur la courroie entre A et C_1, à une distance de 18 cm de A et de 12 cm de C_1.

<u>2$^{\text{ème}}$ étape</u> : Sur la courroie, les points en contact avec A et C_1 tournent d'un angle compris entre 0 et 120°, autour de O pour A et de Q pour C_1.
Entre ces deux points, la courroie est confondue avec un segment S_1 qui se déplace en restant parallèle à [AC], avec le point Ψ toujours à la même distance des extrémités de ce segment, soit 18 cm et 12 cm.



<u>Figure 1</u>

Le point Ψ décrit un arc de cercle représentant un tiers du cercle de centre O' et de rayon R, où O' est le point du segment [OQ] tel que OO' = 18 cm et O'Q = 12 cm.
À l'issue de cette étape, Ψ est en E, où E est le point du segment $[A_2C]$ tel que A_2E = 18 cm et EC = 12 cm. Donc E est sur le segment $[CC_1]$, avec C_1E = 6 cm et CE = 12 cm.

<u>3$^{\text{ème}}$ étape</u> : Sur la courroie, le segment en contact avec $[C_1C]$ tourne autour de Q jusqu'à coïncider avec le segment $[CC_2]$. Le point Ψ décrit un arc de cercle représentant un tiers du cercle de centre Q et de rayon $r = QE$.
Or le triangle CC_1C_2 est équilatéral, donc $QE^2 = QI^2 + IE^2$, I étant le milieu de $[CC_1]$.

On a donc : $QI = \frac{1}{3} \times \frac{18\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ et IE = 9 – 6 = 3, donc $\underline{r = 6}$.
À l'issue de cette étape, le point Ψ se trouve en F, où F est le point du segment $[CC_2]$ tel que CF = 6 cm et C_2F = 12 cm, donc B_1F = 24 cm.

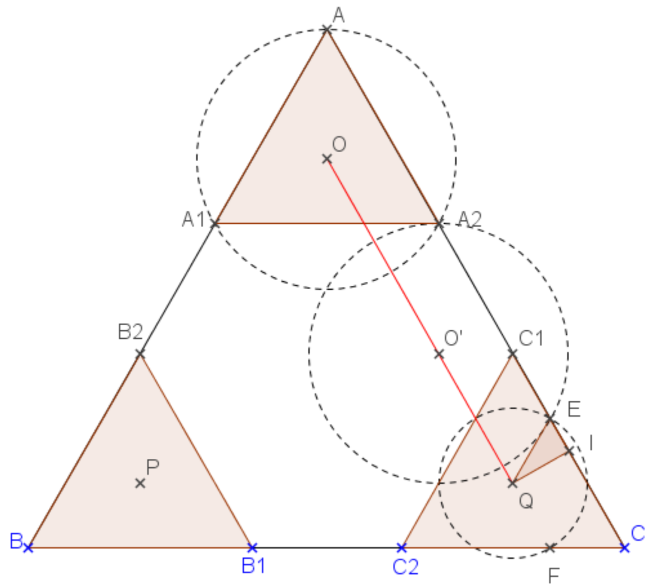


Figure 2

4ème étape : Sur la courroie, les points en contact avec C et B_1 tournent d'un angle compris entre 0 et 120° autour de Q pour C et de P pour B_1, le segment S_2 dont ils sont les extrémités restant parallèle à [BC] et le point Ψ aux distances constantes de 6 cm et 24 cm des extrémités de ce segment.
Le point Ψ décrit un arc de cercle représentant un tiers d'un cercle de rayon R, dont le centre est le point Q' du segment [PQ] tel que QQ' = 6 cm et PQ' = 24 cm (Figure 3).
À l'issue de cette étape, le segment S_2 est en contact avec le segment [C_2B] et le point Ψ se trouve en G, où G est le point du segment [C_2B] tel que C_2G = 6 cm et BG = 24 cm.
Le point G est donc le milieu du segment [BC].

5ème étape : On a GC = 24 cm et GB_1 = 6 cm.
Le point en contact avec C tourne autour de Q jusqu'à C_2 et le point en contact avec B_1 tourne autour de P jusqu'en B. Le point Ψ décrit un arc représentant un tiers d'un cercle de rayon R, dont le centre est le point Q'' du segment [PQ] tel que QQ'' = 24 et PQ'' = 6.

À l'issue de cette étape, le point Ψ se trouve en H, où H est le point du segment [BC_2] tel que HC_2 = 24 cm et BH = 6 cm.

6ème étape : Ψ tourne autour de P et décrit un arc de cercle représentant un tiers du cercle de centre P et de rayon r.

À l'issue de cette étape, le point Ψ se trouve en J, sur [BB_2], où JB = 12 cm et JB_2 = 6 cm.
7ème étape : Ψ décrit un arc de cercle représentant un tiers d'un cercle de rayon R, dont le centre est le point P' du segment [OP] tel que PP' = 12 cm et OP' = 18 cm.
À l'issue de cette étape, le point Ψ se trouve au point du segment [AB_2], situé à 12 cm du point B_2, donc Ψ est en A_1.

8ème étape : Ψ tourne autour de O et parcourt un tiers du cercle de centre O et de rayon R.
A l'issue de cette étape, Ψ se retrouve en A.

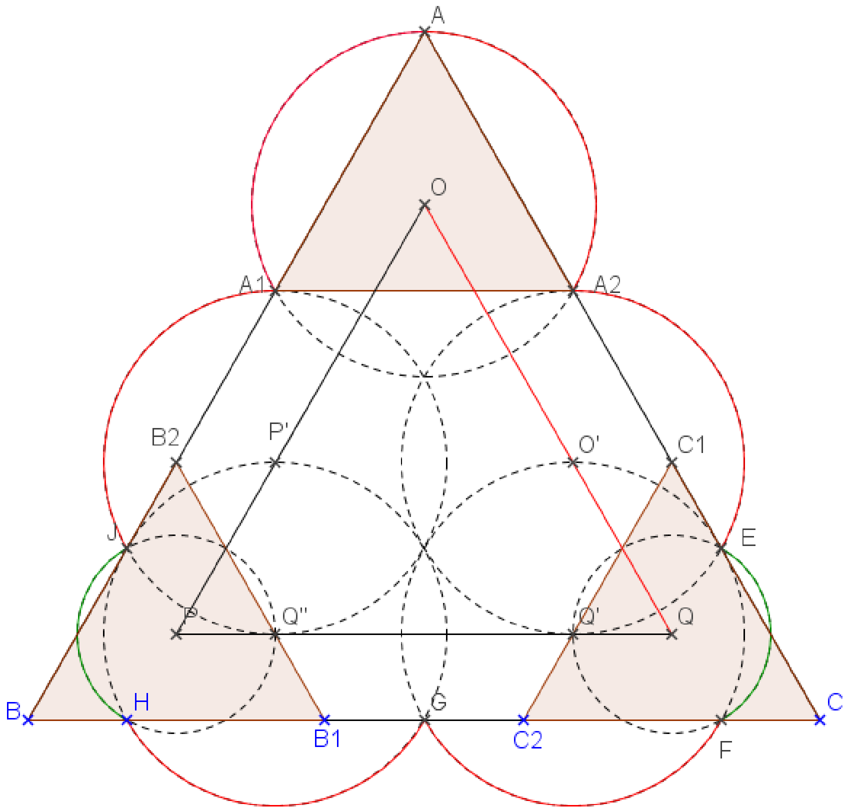


Figure 3

Au terme de ces 8 étapes, le point Ψ a décrit 8 arcs de cercles, chacun représentant d'un cercle, de rayon R pour 6 d'entre eux et de rayon r pour les deux autres.

La distance parcourue par le point Ψ pour revenir à son point de départ est donc :

$$L = 6\times\frac{1}{3}\times 2\pi\times 6\sqrt{3} + 2\times\frac{1}{3}\times 2\pi\times 6 = 24\pi\sqrt{3} + 8\pi \text{ cm}.$$