MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE ET
DE LA JEUNESSE

RÉGION ACADÉMIQUE
ÎLE-DE-FRANCE
MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION NATIONALE
MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Olympiades nationales de mathématiques 2019

Académie de Versailles

Mercredi 13 mars 2019

La partie proprement académique de l'épreuve débute une dizaine de minutes après la fin de la première partie (exercices nationaux). Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur. Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Exercices académiques

Les candidats traitent **deux exercices.** Ceux de la série S traitent les exercices numéros 4 (*Produits de fractions*) et 5 (*Le retournement de la mantisse*), ceux des autres séries traitent les exercices numéros 4 (*Produits de fractions*) et 6 (*Passage de témoin*)

Exercice académique numéro 4 (à traiter par **tous** les candidats)

Produits de fractions

Aïcha, Ben et Caro disposent chacun d'un ensemble de nombres rationnels représentés par des fractions.

Aïcha dispose des nombres a pour lesquels il existe un entier strictement positif n tel que $a = \frac{n+1}{n}$;

Ben dispose des nombres b pour lesquels il existe un entier strictement positif p tel que $b = \frac{6p-5}{3p+6}$;

Caro dispose des nombres c pour lesquels il existe un entier strictement positif q tel que c $= \frac{4q-1}{2q+1}$.

Tous les éléments de chaque ensemble, et tous les produits qu'on peut réaliser avec eux, y compris les puissances, constituent le *patrimoine* de chacun(e).

Exemple : Aïcha dispose des nombres $a = \frac{3}{2}$ (pour $n = 2$) et $a' = \frac{5}{4}$ (pour $n = 4$) donc le nombre $\frac{45}{16}$ appartient aussi au *patrimoine* d'Aïcha puisque $a^2a' = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \frac{5}{4} = \frac{45}{16}$.

1. ***a.*** Le nombre 1 appartient-il au *patrimoine* d'Aïcha ?

b. Ce *patrimoine* contient-il d'autres nombres entiers ?

2. ***a.*** Le nombre $\frac{7}{108}$ appartient-il au *patrimoine* de Ben ?
b. Le *patrimoine* de Ben contient-il une infinité de nombres inférieurs à 1 ?

c. Le *patrimoine* de Ben contient-il des nombres entiers ?

3. ***a.*** Y a-t-il des entiers pairs dans le *patrimoine* de Caro ?

b. Montrer que les entiers 1, 3 et 5 appartiennent au *patrimoine* de Caro.

c. Supposons qu'il existe un entier positif k tel que Caro ait dans son *patrimoine* tous les entiers positifs impairs inférieurs à $4k - 3$. Montrer qu'alors $4k - 1$ et $4k + 1$ sont aussi dans son *patrimoine*. Conclure.

Exercice académique numéro 5 (à traiter par les candidats de la série S)

Le retournement de la mantisse

Tout nombre réel positif peut être écrit de manière unique comme la somme d'un entier positif et d'un réel positif strictement inférieur à 1. Le premier est appelé sa *partie entière*, le second sa *mantisse* (certains ouvrages parlent de *partie fractionnaire* ou de p*artie décimale*, mais cette appellation est impropre, la mantisse n'étant pas nécessairement un rationnel ou un décimal).
On peut noter classiquement $x = \mathrm{E}(x) + m(x)$.

Par exemple la *partie entière du nombre* $\frac{22}{7}$ est 3, et sa *mantisse* $\frac{1}{7}$. La *partie entière du nombre* $\sqrt{2}$ est 1, et sa *mantisse* $\left(\sqrt{2} - 1\right)$.

1. Quelles sont les parties entières et les mantisses des nombres :

$$a = \frac{5}{4}, b = \frac{125}{16}, c = \frac{355}{113}, d = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\ ,\ e = \frac{1}{d}\ \ ?$$

2. Quels sont les nombres égaux à leur mantisse ?

3. ***a.*** Un nombre rationnel peut-il être égal à l'inverse de sa mantisse ?
b. La racine carrée non entière d'un entier strictement positif peut-elle être égale à l'inverse de la mantisse de cette racine carrée ?

4. ***a.*** On se donne un entier naturel n supérieur ou égal à 1. Tout nombre x de l'intervalle $]n, n+1[$ peut être écrit $x = n + y$, y désignant la mantisse – non nulle – de x. Est-il possible que la mantisse de x et celle de son inverse aient pour somme 1 ?
b. L'équation précédente a-t-elle une solution dans l'intervalle $\left]2\ 019, 2\ 020\right[$?

Exercice académique numéro 6 (à traiter par les candidats des séries autres que S)

Passage de témoin

Un certain nombre de cartes, portant chacune un nombre entier strictement positif, sont retournées sur une table. On tire deux cartes, on calcule la somme s et le produit p des nombres qu'elles portent, puis la somme $s+p$. Les cartes tirées sont éliminées. Le nombre $s+p$, qu'on appelle le *témoin*, est inscrit sur une nouvelle carte. Une troisième carte est tirée. On a ainsi deux cartes en mains, avec lesquelles on calcule un nouveau *témoin*, et ainsi de suite. Quand toutes les cartes ont été tirées, il ne reste en mains qu'une seule carte portant le dernier *témoin*, qu'on appelle le *bilan*.

Première situation : il y a trois cartes au départ

1. ***a.*** Si ces cartes sont numérotées $1, 2$ et 3, montrer que le *bilan* ne peut prendre qu'une seule valeur. Laquelle ?

b. Si les trois cartes sont numérotées a, b et c, que peut-on dire du *bilan* ?

2. On suppose que les nombres a, b et c sont deux à deux distincts. Les trois cartes sont tirées.

Le *bilan* obtenu est 59. Quels nombres étaient écrits sur les cartes ? *On trouvera plusieurs solutions.*

Deuxième situation : il y a dix cartes, numérotées de 1 à 10

3. On tire trois cartes.

a. Quelle est la plus petite valeur possible du *témoin* ?

b. Quelle est la plus grande ?

4. On tire quatre cartes. Le *témoin* est 719.

a. Deux des cartes tirées portent les nombres 4 et 8. Quels sont les deux autres ?

b. Un autre tirage de quatre cartes donne le même résultat. Quelles sont-elles ?

5. À partir de combien de cartes tirées est-on certain que le *témoin* est supérieur à $1\,000\,000$?