MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades nationales de mathématiques 2019

Asie - Pacifique - Nouvelle Calédonie - Polynésie Française

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices nationaux

Les candidats traitent **deux exercices.** Ceux de la série S traitent les exercices numéros 1 (*La tête aux carrés*) et 2 (*Ne dérange pas mes cercles !*), les autres traitent les exercices numéros 1 (*La tête aux carrés*) et 3 (*Clairs horizons*).

Exercice national numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

La tête aux carrés

Soit n un entier naturel, on dit que n est « décomposable en somme de carrés » s'il est égal à une somme de carrés d'entiers naturel. Par exemple 0, 10 et 33 admettent pour décompositions en carrés : $0 = 0^2$, $10 = 3^2 + 1^2$ et $33 = 5^2 + 2^2 + 2^2$.

Partie préliminaire

1. Écrire une décomposition en somme de carrés de chacun des nombres 5 et 22.

2. Ces décompositions sont-elles les seules sommes de carrés égales à 5 ou à 22 ?

3. Tout entier naturel non nul est-il décomposable en somme de carrés ?

Avec deux carrés seulement

Dans cette partie on s'intéresse aux entiers naturels n décomposables en somme de deux carrés, c'est-à-dire pour lesquels il existe deux entiers naturels a et b tels que $n = a^2 + b^2$.

On appelle ces entiers naturels des « nombres bicarrés ».

Par exemple, 1, 18 et 1 402 sont des nombres bicarrés car $1 = 1^2 + 0^2$, $18 = 3^2 + 3^2$, $1\,402 = 31^2 + 21^2$.

4. Le nombre 58 est-il un nombre bicarré ?

5. Le nombre 21 est-il un nombre bicarré ?

6. Y a-t-il une infinité de nombres bicarrés ?

7. Dans cette question, on s'intéresse au produit de deux nombres dont chacun est un nombre bicarré.

a. Commencer par montrer l'égalité de Lagrange, valable pour tous nombres a, b, c et d :

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

b. En déduire une décomposition en somme de deux carrés de 18×58.

c. En déduire également une décomposition en somme de deux carrés du double d'un nombre bicarré.

d. Montrer que la moitié d'un nombre pair bicarré est un nombre bicarré.

e. $1\,344$ est-il un nombre bicarré ?

f. Existe-t-il une infinité de nombres pairs bicarrés ?

g. Existe-t-il une infinité de nombres pairs qui ne sont pas bicarrés ?

Avec quatre carrés

Dans cette partie on s'intéresse aux entiers naturels décomposables en sommes de carrés pour lesquels il existe une décomposition en somme de quatre carrés.

Par exemple $43 = 5^2 + 4^2 + 1^2 + 1^2$ et $42 = 5^2 + 4^2 + 1^2 + 0^2$

Joseph Louis Lagrange démontra en 1770 que tout nombre entier naturel est décomposable en quatre carrés.

8. Écrire un algorithme fournissant une décomposition en quatre carrés d'un entier N lorsque cela est possible.

9. *a.* Si on veut trouver une décomposition en quatre carrés du nombre $7\,044$, quel est le plus grand carré susceptible d'y figurer ? Y a-t-il une décomposition de $7\,044$ dans laquelle ce carré figure ?

b. Il existe une décomposition de $7\,044$ en somme des carrés de quatre nombres en progression arithmétique, dont le plus petit est 1. Quels sont ces quatre nombres ?

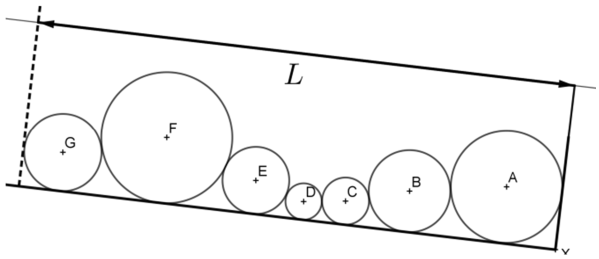
Exercice national numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

Ne dérange pas mes cercles !

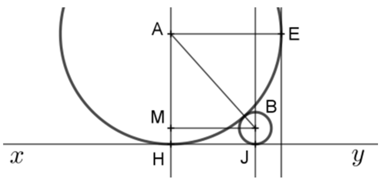
Selon la légende, *dernières paroles d'Archimède*

Encombrement d'une suite de disques

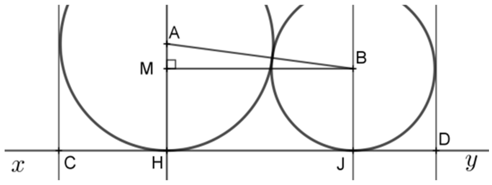
On place sur une étagère une série de rondelles de bois de même épaisseur, dont les rayons peuvent être différents. La légère pente donnée à l'étagère assure le contact : chaque disque est tangent à un ou des voisins. Le but du problème est d'étudier des dispositions qui minimisent l'encombrement L.



1. Cas de deux disques



Deux disques (centrés en A et B, de rayons R et r, tels que $r \leq R$) sont tangents respectivement en H et J. à la droite (xy), figure de droite.



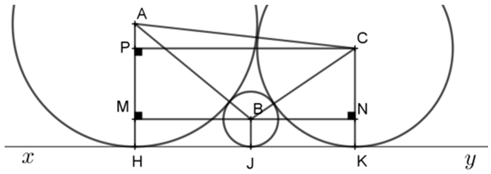
a. Exprimer en fonction de R le rayon maximal du petit disque r pour lequel l'encombrement créé par les deux disques est le même que celui créé par le seul grand (figure de gauche). *On pourra être amené à résoudre une équation du second degré d'inconnue $x = \sqrt{r}$.*

b. Si r est supérieur à ce maximum, établir que l'encombrement créé par les deux disques est :

$$L = R + r + 2\sqrt{Rr}$$

2. Cas de trois disques

a. Trois disques, de centres A, B et C et de rayons p, q et r sont tangents à une même droite et tangents deux à deux, figure ci-contre. L'encombrement est donc égal à celui que les deux disques extérieurs créent à eux seuls. Exprimer le rayon q du disque intérieur en fonction des rayons p et r des disques extérieurs.



b. Dans cette question, les trois disques sont tangents à une même droite, et, de gauche à droite (dans l'ordre de leurs centres), le cercle de centre A est tangent au cercle de centre B, lui-même tangent au cercle de centre C, qui est sans point commun avec le cercle de centre A. Exprimer l'encombrement créé par ces trois disques en fonction de leurs rayons p, q et r.

c. On échange les places des disques de centres B et C et on suppose comme en ***b.*** que le disque central sépare ses deux voisins. Quel est le nouvel encombrement ?

Toujours sous l'hypothèse faite au ***b.***et au **c.**, on suppose de plus que $p \geq q \geq r$. On place les disques dans l'ordre A-B-C, A-C-B ou B-A-C (disposition dans l'ordre décroissant des rayons, ou le plus petit au milieu, ou le plus grand au milieu).

d. Montrer que la disposition A-B-C crée l'encombrement maximum.

e. Montrer que la disposition B-A-C crée l'encombrement minimum si et seulement si $\sqrt{q} - \sqrt{r} \leq \sqrt{p} - \sqrt{q}$.

3. Sept d'un coup

Dans cette question, on dispose de sept disques de rayons 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10 (l'unité est le cm).

a. On place le disque de rayon 10 en premier, puis les autres à sa droite, dans l'ordre décroissant des rayons. Compléter le tableau ci-contre (résultats arrondis au centième de mm) et donner un arrondi au mm de l'encombrement obtenu.

Rayon	**10**	**9**	**8**	**7**	**6**	**5**	**4**
$\sqrt{r(r+1)}$		9, 487	8, 485	7, 483	6, 481	5, 477	4, 472
Encombrement	20	37,974	53, 944				

b. Proposer un algorithme renvoyant l'encombrement créé par les sept disques placées comme ci-dessus et contrôler le calcul du ***a.***

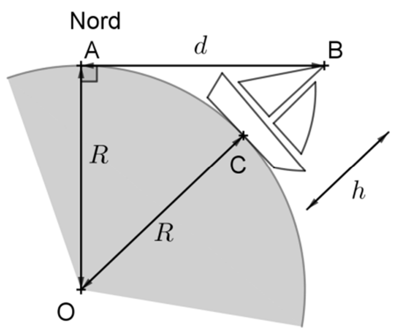
c. Pourquoi cet encombrement est-il maximal pour ces sept disques dans la disposition du ***a*** ? Le comparer à la somme des diamètres des disques.
d. De combien diminue l'encombrement total si, dans la disposition du ***a***, on fait passer le disque de rayon 4 de l'extrême droite à l'extrême gauche ?

4. ***a.*** Combien y a-t-il de façons différentes de disposer ces sept disques ?
b. Parmi ces dispositions, combien y en a-t-il pour lesquelles le plus grand disque est placé au milieu, de façon qu'il n'y ait jamais trois disques consécutifs de rayons croissants ou de rayons décroissants (disposition en *dents de scie*) ?
c. Combien y a-t-il de dispositions pour lesquelles les rayons forment une suite croissante, ou une suite décroissante, ou alors une suite d'abord croissante puis décroissante ?

Exercice national numéro 3 (à traiter par les candidats des séries autres que la série S)

Clairs horizons

A. Calcul du rayon R de la Terre



Un observateur se trouve sur le rivage en A et voit s'éloigner vers le sud un bateau dont on connait la hauteur h émergée (comme sur la figure ci-contre, qui n'est pas à l'échelle). Du fait de la rotondité de la Terre, le bâtiment disparait totalement de l'horizon, une fois éloigné de la côte de la distance $d = AB$ à vol d'oiseau.
On néglige la taille de l'observateur de telle sorte que $OA = R$.
On suppose connue la distance d. On rappelle que la ligne d'horizon (AB) est tangente à la Terre en A.
1. Trouver une relation entre R, d et h.
2. Justifier que $\frac{h}{R}$ est très petit.
3. En déduire que $R \approx \frac{d^2}{2h}$.
4. Application numérique : pour $h = 20\ \mathrm{m}$ et $d = 16\ \mathrm{km}$, donner une valeur approchée au km près du rayon R de la Terre.
5. En quoi ce raisonnement est-il affecté si le bateau ne s'éloigne pas vers le sud ?

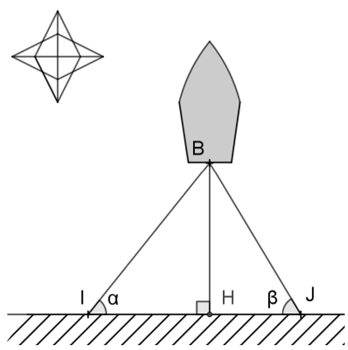
B. Ligne d'horizon

Dans toute cette partie, on convient que $R = 6\,400\ \mathrm{km}$.

6. On cherche quelle doit être la hauteur h du bateau dans la figure ci-dessus pour que la vigie, située en haut du mat, aperçoive le rivage d'une île située à une distance (en ligne droite) d donnée.
Montrer que cela revient à résoudre, pour d donnée, l'équation d'inconnue h : $(h + R)^2 = d^2 + R^2$

7. Dans le cas où $d = 50\ \mathrm{km}$, calculer la hauteur h et la longueur de l'arc $\widehat{\mathrm{AC}}$.

C. Calcul de la distance d



On mesure en pratique d (dans la partie A, on l'a supposée donnée) par triangulation comme sur le schéma ci-contre (qui n'est pas à l'échelle).
L'écart entre les deux points de repère I et J situés sur la berge (appelés *amers*) est connu et les deux angles α et β sont relevés à l'aide d'instruments de navigation.

8. Montrer l'égalité suivante : $d = \frac{IJ\ \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.
9. Retrouver la valeur donnée pour d dans la partie A sachant que $IJ = 1\ \mathrm{km}$, $\alpha = 88°$ et $\beta = 88{,}42°$.