Clairs horizons (Séries autres que S)

Éléments de solution

A. Calcul du rayon R de la Terre

1. Le triangle ABO étant rectangle en A, on applique le théorème de Pythagore : $(R+h)^2 = R^2 + d^2$. Cette relation peut être simplifiée en : $2Rh = d^2 - h^2$. (1)

2. h mesure quelques mètres, le rayon de la Terre des centaines de kilomètres. Leur rapport est de l'ordre du cent-millième.

3. En divisant par $2h$ chacun des membres de l'égalité (1), on obtient $R = \frac{d^2}{2h} - \frac{h}{2}$ et $\frac{h}{2}$ est négligeable devant $\frac{d^2}{2h}$.

4. On trouve $R \approx 6\,400$km.

5. Pour parler de rayon terrestre, il faut considérer des grands cercles.

B. Ligne d'horizon

6. Si on suppose d et R donnés, la relation (1) peut être lue comme une équation en h.

7. Dans le cas où $d = 50$km, on conserve l'équation sous la forme $\left(6\,400 + h\right)^2 = 6\,400^2 + 50^2$, dont la solution (la racine positive est la seule qui ait un sens) est donnée par : $h = \sqrt{6\,400^2 + 50^2} - 6\,400$, qui fournit une valeur de h exprimée en kilomètres. Finalement, $h = 19{,}5\text{m}$, valeur arrondie au dm.

D'autre part, $\tan \widehat{\text{COA}} = \frac{d}{R} = \frac{1}{128}$, ce qui donne un angle de $0{,}448$ degré. La longueur de l'arc $\overset{\frown}{\text{AC}}$ est donnée par : $L = \frac{0{,}448}{180} \times \pi \times 6\,400 = 50{,}042$ valeur arrondie au mètre.

Remarque : évidemment, la longueur de l'arc est très proche de la distance d.

C. Calcul de la distance d

8. On applique la « loi des sinus » dans le triangle IBJ : $\frac{IB}{\sin\beta} = \frac{JB}{\sin\alpha} = \frac{IJ}{\sin(180-\alpha-\beta)}$,

En tenant compte du fait que $d = BJ\sin\beta$ et que $\sin(180-\alpha-\beta) = \sin(\alpha+\beta)$, on obtient l'égalité demandée.

9. On calcule $d = \frac{1\times\sin 88\times\sin 88{,}42}{\sin 176{,}42}$ avec les valeurs $\sin 88 = 0{,}999391$, $\sin 88{,}42 = 0{,}999620$ et $\sin 176{,}42 = 0{,}062442$ et on trouve $d = 15{,}9989$ valeur qui sera arrondie à 15 km.